

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}(n)$.

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}(n)$ est le groupe des bijections d'un ensemble à n éléments. On identifie un ensemble de cardinal n à $\llbracket 1, n \rrbracket$. Les propriétés du groupe symétriques (générateurs, sous-groupes conjugués...) sont étroitement liées à son action naturelle sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1 Action par conjugaison sur lui-même

Exercice 1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ un cycle de longueur k .

1. Montrer que pour toute permutation $\gamma \in \mathfrak{S}(n)$, $\gamma \circ \sigma \circ \gamma^{-1}$ est un cycle de longueur k .
2. Montrer que si σ' est un cycle de longueur k , il existe $\gamma \in \mathfrak{S}(n)$ tel que $\gamma \circ \sigma \circ \gamma^{-1} = \sigma'$.

On a ainsi montré le résultat suivant

Proposition 1.1. *Le groupe $\mathfrak{S}(n)$ agit transitivement sur l'ensemble des k -cycles.*

Exercice 2. On rappelle que $Z(\mathfrak{S}(n))$ est le centre du groupe $\mathfrak{S}(n)$ c'est-à-dire l'ensemble des éléments $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ tels que pour tout $\gamma \in \mathfrak{S}(n)$, $\gamma = \sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$. Montrer que $Z(\mathfrak{S}(2)) = \mathfrak{S}(2)$ et que $Z(\mathfrak{S}(n)) = \{\text{Id}\}$ si $n \geq 3$.

2 Support et orbites d'une permutation

Définition 2.1. Le support d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ est l'ensemble

$$\text{Supp}(\sigma) := \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \sigma(k) \neq k\}.$$

Propriétés 2.1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$. Alors

1. $\sigma(\text{Supp}(\sigma)) = \text{Supp}(\sigma)$
2. $\text{Supp}(\sigma^{-1}) = \text{Supp}(\sigma)$
3. pour $k \in \mathbb{Z}$, $\text{Supp}(\sigma^k) \subset \text{Supp}(\sigma)$.

Exercice 3. Montrer que deux permutations de support disjoint commutent. La réciproque est-elle vraie ?

Définition 2.2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$. On appelle orbite de j l'orbite de k sous l'action naturelle de $\langle \sigma \rangle$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, c'est à dire l'ensemble $\{\sigma^k(j), \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 4. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ et $O \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ une σ -orbite de cardinal $m \geq 2$. Montrer que pour tout $j \in O$,

$$O = \{\sigma^k(j) \mid 0 \leq k \leq m-1\}.$$

Théorème 2.1. *Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ est un cycle si et seulement si elle n'a qu'une seule orbite non réduite à un point.*

Exercice 5. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 8 & 9 & 10 & 11 & 7 \end{pmatrix}$

1. Décrire l'orbite et le stabilisateur de chaque entier $k \in \llbracket 1, 11 \rrbracket$ pour l'action naturelle de $\langle \sigma \rangle$ sur cet ensemble.
2. En déduire une décomposition de σ en cycles à supports disjoints.

3 Générateurs de $\mathfrak{S}(n)$

Théorème 3.1. *Toute permutation se décompose en produit de cycles disjoints et cette décomposition est unique à l'ordre près.*

Exercice 6 (Preuve du théorème). On considère la partition en orbites $O_1 \sqcup \dots \sqcup O_p$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $q \leq p$ tel que les orbites O_i pour $1 \leq i \leq q$ soient de cardinal > 1 et les orbites O_i pour $i > q$ de cardinal 1.

1. Posons pour $1 \leq i \leq q$,

$$\gamma_i(j) = \begin{cases} \sigma(j) & \text{si } j \in O_i \\ j & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifier que γ_i est un cycle de support O_i .

2. Vérifier que $\sigma = \prod_{i=1}^q \gamma_i$.
3. Soit $\sigma = \prod_{j=1}^{q'} \gamma'_j$ une autre décomposition de σ en cycles disjoints. Montrer que $q' = q$ et que pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, il existe un unique $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ tel que $\gamma'_i = \gamma_j$.

Théorème 3.2. *Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ s'écrit comme un produit de transpositions.*

Exercice 7. Prouver le théorème. On pourra commencer par montrer qu'un cycle de longueur k se décompose en un produit de $k - 1$ transposition.

Exercice 8. Montrer que $\mathfrak{S}(n)$ est engendré par :

1. les transpositions $(1, k)$, $2 \leq k \leq n$,
2. les transpositions $(k, k + 1)$, $1 \leq k \leq n - 1$,
3. la transposition $(1, 2)$ et le cycle $(1, \dots, n)$.

4 Signature

Définition 4.1. On appelle *signature* d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ le nombre noté $\varepsilon(\sigma) := (-1)^{n-\mu(\sigma)}$ où $\mu(\sigma)$ est le nombre de σ -orbites distinctes de σ

Remarque 4.1. La signature d'une permutation est un élément de $\{-1, 1\}$.

- Exercice 9.**
1. Montrer que $\varepsilon(\text{Id}) = 1$
 2. Montrer que si τ est une transposition $\varepsilon(\tau) = -1$
 3. Montrer que si σ est un cycle de longueur k , $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}$.

Théorème 4.1. *Si $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ est le produit de p transposition, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$*

Remarque 4.2. Il n'y a pas unicité d'une décomposition d'une permutation en transposition, ni même du nombre de permutations. Néanmoins, ce nombre a toujours la même parité.

Théorème 4.2. *Les seuls morphismes de groupes de $(\mathfrak{S}(n), \circ)$ vers le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont la signature et le morphisme trivial.*

- Exercice 10** (Preuve du théorème 3.5).
1. Vérifier que la signature est un morphisme.
 2. Soit $\varphi : \mathfrak{S}(n) \rightarrow \mathbb{R}^*$ un morphisme.
 - (a) Montrer que pour tout transposition τ , $\varphi(\tau) \in \{-1, 1\}$
 - (b) Montrer que si τ_1, τ_2 sont deux transpositions $\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2)$ (autrement dit φ est constant sur les transpositions).
 - (c) Conclure