Préparation à l'agrégation 2019-2020

Exercices : Différentielles d'ordre supérieur et formules de Taylor

Tous les espaces considérés sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Exercice 1. Soit $b : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Montrer que b est C^∞ et déterminer $d^k b$ pour tout k.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe au moins C^3.

1. Déterminer la différentielle troisième de f.
2. Appliquer le théorème de Schwarz et en déduire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3.

Exercice 3. Déterminer la formule de Taylor-Young à l'ordre 5 en $(0,0)$ pour $f : (x,y) \mapsto x^3y^2 + xy^2 + xy + y$. En déduire $df(0,0)$ et $d^2f(0,0)$.

Exercice 4.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $F : \theta \mapsto f(\cos\theta, \sin\theta)$. Calculer $F''(\theta)$.
2. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions de classe C^2. Déterminer la différentielle seconde de $g \circ f$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et telle que $f(0) = 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pout tout $1 \leq k \leq n$, $f^{(k)}(0) = 0$. Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x^n}$ est de classe C^∞.

Exercice 6. Soit O un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $f : O \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que $f(0) = 0$ et $d_0 f \equiv 0$. Montrer qu'il existe des fonctions g_{ij} de classe C^∞ telles que

$$f = \sum_{i,j} g_{ij} e_i^* e_j^*$$

où $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ désigne la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 7. Soit $f : E \to F$ une fonction de classe C^2 telle que pour $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$, $f(tx) = t^2 f(x)$. Montrer que, pour tout $x \in E$, $d^2f(0)(x,x) = 2f(x)$.

Exercice 8. Soit $f : E \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe C^2 telle qu'il existe $M > 0$ tel que $\sup_{x\in E} |||d^2f(x)||| \leq M$.

1. Montrer que pour tout x, h dans E et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + t d_x f(h) + \frac{t^2}{2} M ||h||^2 > 0$$

2. En déduire que pour tout $x \in E$, $|||d_x f||| \leq \sqrt{2f(x)M}$.