EXERCICES : INVERSION LOCALE ET FONCTIONS IMPLICITES

- Exercice 1.** 1. Montrer qu'une fonction propre entre deux espaces métriques est fermée.
2. Déterminer les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + a \sin y, y + b \cos x)$$

est un difféomorphisme local.

On suppose désormais que que f est un difféomorphisme local.

3. Montrer que f est injective.
4. Montrer que f est propre et en déduire que f un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Exercice 2. On considère les fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$f : (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy) \quad \text{et} \quad g : (x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

1. En quels points f et g sont-elles des difféomorphismes locaux ?
2. Pour chacune, déterminer des ouverts *maximaux* sur lesquels on a un difféomorphisme global.

Exercice 3. Soit $F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 1\}$.

1. Vérifier que $(0, 1) \in F$ et qu'il existe un voisinage de U de $(0, 1)$ tel que $U \cap F$ est le graphe d'une fonction $x \mapsto \varphi(x)$ de classe C^∞ .
2. Écrire un développement de Taylor de φ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, t) \mapsto \cos xt + \sin xt - x$.

1. Montrer que pour tout $t \in]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$, l'équation $f(t, x) = 0$ a une unique solution notée $\varphi(t)$.
2. Montrer que $t \mapsto \varphi(t)$ est de classe C^∞ .
3. Déterminer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $v \in L(E)$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que si $\|v\| \leq r$, l'équation $u^3 + uv + \text{Id}_E = 0$ admet une solution.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est C^1 et qu'il existe $k > 0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) \geq k$. Montrer que f est difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Est-ce toujours vrai si $k = 0$?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle qu'il existe $\gamma > 0$ tel que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$,

$$\|x - y\| \leq \gamma \|f(x) - f(y)\|.$$

1. Montrer que f est un difféomorphisme local en tout point.

2. Montrer que f est surjective.
3. En déduire que f est un difféomorphisme.
4. Soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tous x et z dans $\mathbb{R}^n$,

$$\langle df(x)(z), z \rangle \geq \delta \|z\|^2$$

Montrer que g est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8. Soit $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $\|d_x h\| < 1$. Posons $f = \text{Id} + h$.

1. Montrer que f est un difféomorphisme sur son image.

On suppose de plus que $\sup_x \|d_x f\| < 1$.

2. Montrer que f est coercive.
3. Montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.