Préparation à l'agrégation

Exercices : Différentiabilité

Exercice 1. Les fonctions ci-dessous sont prolongées par 0 en $(0,0)$. Dites si les propriétés suivantes sont satisfaites :

a) f est continue en $(0,0)$

b) f admet des dérivées partielles en $(0,0)$

c) f admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$ suivant tout vecteur

d) l'application $v \mapsto \partial_v f(0,0)$ est linéaire

e) f est différentiable en $(0,0)$

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$
3. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{|x|}y^2}{x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^4}$
5. $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$

Exercice 2. Montrer que la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + y^2 \sin \dfrac{1}{y}, & xy \neq 0 \\ x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, y = 0 \\ y^2 \sin \dfrac{1}{y}, & y \neq 0, x = 0 \\ 0, & \text{en } (0,0) \end{cases}$$

est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \inf(x^2, y^2)$. Déterminer la plus grande partie de $\mathbb{R}^2$ sur lequel

a) f est continue,

b) f est différentiable,

c) f est C^1.

Exercice 4. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \arctan x + \arctan y - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right). \end{array}$$

1. Déterminer son domaine de définition D et montrer qu'elle y est de classe C^1.
2. Déterminer sa différentielle en chaque point de D.
3. Que peut-on en déduire sur f ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soient $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'application

$$F : x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 6.

1. Soit $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire. Montrer que b est différentiable et déterminer sa différentielle en un point (a,b).

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $f_A : x \mapsto \langle x, Ax \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que f_A est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.
3. Montrer que f_A n'est pas différentiable en 0.
4. Montrer que $x \mapsto ||x||_2$ est différentiable en tout point non nul et calculer sa différentielle.

Soit $\gamma :]0,1[\to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ une fonction C^1. Soit $\delta_\gamma : t \mapsto d(0, \gamma(t))$ où d est la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

5. Montrer que δ est dérivable et calculer sa dérivée. Interpréter géométriquement le fait que $\delta'_\gamma(t) = 0$.

Exercice 7. Soit $k \geq 2$. Montrer que l'application $L(\mathbb{R}^n) \to L(\mathbb{R}^n) : u \mapsto u^k$ est de classe C^∞ et déterminer sa différentielle.

Exercice 8. On veut montrer que l'application $\mathscr{I} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est de classe C^∞.

1. Montrer que $\mathscr{I}$ est différentiable en I_n et déterminer $d_{I_n}\mathscr{I}$.
2. En déduire qu'elle est différentiable en tout $u \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $d_u\mathscr{I}$.
3. En déduire que $\mathscr{I}$ est C^∞.

Exercice 9. On veut déterminer la différentielle de l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

1. Quelle est la régularité de det ?
2. Calculer la différentielle de det en I_n.
3. En déduire la différentielle de det en $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
4. En déduire la différentielle de det en un point quelconque de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10. On note $|| \cdot ||$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Soit $w \in \mathbb{R}^n$.

1. Déterminer en quels points l'application $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : v \mapsto ||v - w||^2$ est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Mêmes questions pour l'application $\psi : v \mapsto ||v - w||$.

Exercice 11. Soit E, F deux $\mathbb{R}$ espaces de dimension finie, U ouvert de E et $f : U \to F$. on dit que f est strictement différentiable en $a \in U$ s'il existe une application linaire $\ell : E \to F$ telle que pour h, k assez petits

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{||f(a+h) - f(a+k) - \ell(h-k)||}{||h-k||} = 0$$

1. Montrer que si f est strictement différentiable en a, elle est différentiable en a.
2. Montrer que si f est C^1, f est strictement différentiable en tout point de U.
3. Montrer la réciproque : si f est strictement différentiable en tout point, f est C^1.
4. Donner un exemple de fonction différentiable qui n'est pas strictement différentiable.

Exercice 12. 1. Montrer que tout ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs continus affines par morceaux.

Soit E, F deux $\mathbb{R}$ espaces de dimension finie, U ouvert connexe de E, et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications C^1 de U dans F. On suppose que :

- il existe $a \in U$ tel que $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
- la suite $(df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $g : U \to \mathscr{L}(E, F)$.

2. Montrer que pour h assez petit et pour tous p, q
$$||f_p(a+h) - f_p(a) - f_q(a+h) + f_q(a)|| \leq \sup_{t\in[0,1]} |||d_{a+th}(f_p - f_q)||| \cdot ||h||$$
3. En déduire que f_n converge simplement vers une fonction f.
4. Montrer que f est différentiable et que $df = g$.

Pour aller plus loin : différentiablité en dimension infinie

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$. On note $\ell_1(\mathbb{R})$ le sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n < \infty$. On considère l'application
$$\begin{array}{rccc} \tilde{f} : & \ell_1(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}. \end{array}$$
Montrer que $\tilde{f}$ est à valeurs dans $\ell_1(\mathbb{R})$, qu'elle est différentiable et déterminer sa différentielle.

Exercice 14. On considère l'application
$$\begin{array}{rccc} g : & \ell_1(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 \end{array}$$
Montrer que g est bien définie, qu'elle est de classe C^1 et calculer sa différentielle.

Exercice 15. On note $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}^2)$ l'espace des applications $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ telles que

- f est de classe C^1 sur $]0, 1[$,
- f est continûment dérivable à droite en 0 et à gauche en 1.

L'application $f' :]0, 1[\to \mathbb{R}^2$ est ainsi prolongée par continuité en 0 en 1. On considère l'application
$$\begin{array}{rccc} \mathcal{N} : & \mathscr{C}^1([0,1], \to \mathbb{R}^2) & \to & \mathbb{R}^+ \\ & f & \mapsto & \max\limits_{t\in[0,1]} ||f(t)|| + ||f'(t)||. \end{array}$$

1. Vérifier que $\mathcal{N}$ est une norme.

On considère l'application
$$\begin{array}{rccc} T : & \mathscr{C}^1([0,1], \to \mathbb{R}^2) & \to & \mathbb{R}^+ \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \det(f(t), f'(t)). \end{array}$$

2. Montrer que T est de classe C^1 et calculer sa différentielle.