Préparation à l'agrégation 2020-2021

Courbes en analyse complexe

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\gamma^n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : t \mapsto e^{int}$. Calculer pour $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Ind}_{\gamma^n}(z)$.

Exercice 2. Soit $r > 0$.

1. Soit $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ et soit $C_r : [\alpha, \beta] :\to \mathbb{C} : t \mapsto re^{it}$. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue telle que $\lim_{|z|\to 0} zf(z) = 0$
$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r\to 0} f(z)dz = 0$$
2. Soit $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$ et soit $\gamma_r : [\alpha, \beta] :\to \mathbb{C} : t \mapsto re^{it}$. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue telle que $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$
$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}dz = 0.$$

Exercice 3.
1. Soit P et Q deux polynômes tels que $a \in \mathbb{C}$ est une racine simple de Q et $P(a) \neq 0$. Montrer que
$$\operatorname{Res}_a \frac{P}{Q} = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$
2. En déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx.$$

Exercice 4.
1. Soit $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et f une fonction holomorhe sur $D^*(a, r)$ (disque épointé en a) qui admet un pôle d'ordre 1 en a. Soit pour $r > 0$, $\gamma_r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} : t \mapsto a + re^{it}$. Montrer que
$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = i(\beta - \alpha)\operatorname{Res}_a(f)$$
2. En déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx.$$

Exercice 5. Soit f une fonction analytique réelle 2π-périodique.

1. Montrer qu'il existe $\delta >$ tel que f se prolonge en une fonction holomorphe 2π-périodique sur une bande $B := \{z \in \mathbb{C} \mid f|\operatorname{Im} z| < \delta\}$.
2. Soit $\alpha < \delta$. Soit $M_\alpha := \max\{|f(z)| \mid z \in B_\alpha\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\widehat{f}(n)| \leq M_\alpha |f| e^{-n\alpha}$.

Exercice 6. L'objectif est de montrer que la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne est simplement connexe.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que le nombre minimal N_ε de boules de rayon ε nécessaires pour recouvrir $\mathbb{S}^2$ est $\geq \frac{6}{\varepsilon^2}$.
2. Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{S}^2$ un chemin lipschitzien. Montrer que γ n'est pas surjective.
3. Montrer que pour tous x, y sur $\mathbb{S}^2$ non antipodaux, et tout $t \in [0, 1]$, $(1 - s)x + sy \neq 0$.
4. Montrer que tout lacet γ sur $\mathbb{S}^2$ est homotope à un lacet lipschitzien η tel que pour $||\gamma(t) - \eta(t)|| < 2$ pour tout t et conclure.