Préparation à l'agrégation 2019-2020

Longueur et abscisse curviligne

Exercice 1. Soit $[a, b$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un arc de classe C^1. On appelle *subdivision* de $[a, b]$ une famille de points $\sigma := \{t_0, \cdots, t_n\}$ telle que

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b.$$

À une subdivisions σ de $[a, b]$ associe le réel $\ell(\sigma)$ donné par

$$\ell(\sigma) := \sum_{i=0}^{n-1} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})||.$$

On pose $\ell(\gamma) := \sup\{\ell(\sigma) \,|\, \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}$.

1. Montrer que $\ell(\gamma)$ est fini.
2. Montrer que si $\tilde{\sigma}$ est une subdivision obtenue en ajoutant des points à σ, $\ell(\tilde{\sigma}) \geq \ell(\sigma)$.
3. Soit A et B deux points distincts de $\mathbb{R}^2$. Calculer $\ell(\gamma)$ pour $[a, b] = [0, 1]$ et $\gamma : t \mapsto (1 - t)A + tB$.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous t, s dans $[a, b]$ tels que $|t - s| \leq \eta$,
$$||\gamma(t) - \gamma(s) + (s - t)\gamma'(t)|| \leq \varepsilon|t - s|.$$
Indication *: on peut étudier la fonction* $\alpha_t : s \mapsto \gamma(s) - s\gamma'(t)$
5. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si σ est une subdivision telle que telle que pour tout i, $|t_i - t_{i+1}| \leq \eta$, alors
$$\left|\ell(\sigma) - \int_a^b ||\gamma'(t)||dt\right| \leq 2\varepsilon(b - a).$$
6. Déduire des questions précédentes que $\ell(\gamma) = \displaystyle\int_a^b ||\gamma'(t)||dt$.

On appelle longueur *de la courbe* Γ *le nombre*

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt.$$

Exercice 2. Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un arc de classe C^1, tel que pour tout t, $\gamma'(t) \neq 0$. Soit $\Gamma := \gamma([a, b])$ la courbe image.

1. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $\phi : I \to J$ un difféomorphisme. Vérifier que ϕ' ne s'annule pas.
2. Soit I et J deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$ et soit $\phi : I \to J$ une bijection de classe C^1 et de dérivée jamais nulle
   (a) Montrer que ϕ^{-1} est Lipschitzienne.
   (b) Montrer ϕ est un difféomorphisme. ***Indication*** *: pour* $y = \phi(x)$*, on pourra commencer par montrer l'équivalence suivante pour* k *et* h *assez petits :*
   $$k = \phi(x + h) - \phi(x) \iff h = \phi^{-1}(y + k) - \phi^{-1}(y).$$
3. Montrer que $\ell(\Gamma)$ ne dépend pas du paramétrage choisi.
4. Montrer que l'application $\sigma : t \mapsto \int_a^t ||\gamma'(s)||ds$ est un C^1-difféomorphisme de $[a, b]$ sur un intervalle J qu'on précisera.
5. Vérifier que pour tout $t \in J$, $||(\gamma \circ \sigma^{-1})'(t)|| = 1$. On dit que la courbe Γ est *paramétrée par l'abscisse curviligne.*