Université de Picardie Jules Verne 2020-2021
Préparation à l'Agrégation interne de mathématiques

# Action de groupes

## 1 Définitions de base

Dans toute cette section $G$ est un groupe et $E$ un ensemble non vide.

**Définition 1.1.** Une action de $G$ sur $E$ est une application :

$$\begin{array}{rccc} A: & G \times E & \to & E \\ & (g,x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

telle que :

1. pour tous $g, g' \in G$ et tout $x \in E$, $g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$,
2. pour tout $x \in E$, $e \cdot x = x$.

On dit alors que $G$ *agit* ou *opère* sur $E$.

*Remarque* 1.1. L'action d'un groupe $G$ sur $E$ induit une action de $G$ sur $E^n$, dite *action diagonale*, donnée par $g \cdot (x_1, \dots, x_n) = (g \cdot x_1 \dots, g \cdots x_n)$.

**Exercice 1.** Montrer que la donnée d'une action $A$ de $G$ sur $E$ est équivalente à la donnée d'un morphisme de groupes $\mathscr{A} : G \to \mathfrak{S}(E)$.

*Exemples* 1.1.
1. Le groupe symétrique $S_n$ agit sur l'ensemble des entiers $[\![1, n]\!]$ par $\sigma \cdot k = \sigma(k)$.
2. Le groupe linéaire $M_n(\mathbb{Z})$ agit sur $\mathbb{Z}^n$ par $M \cdot X = MX$.
3. Le groupe $\mathbb{Z}^n$ agit sur $\mathbb{R}^n$ par $(k_1, \dots, k_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = (x_1 + k_1, \dots, x_n + k_n)$ (action par translation).

*Remarque* 1.2. Soit $E$ un ensemble. Tout sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}(E)$ des bijections de $E$ agit sur $E$ par $f \cdot x = f(x)$. Une telle action est dite *naturelle*.

**Définition 1.2.** Soit $G$ un groupe opérant sur un ensemble non-vide $E$ et $x \in E$.

1. Le *stabilisateur de $x$* est le sous-ensemble de $G$ :
$$G_x = \{g \in G \,|\, g \cdot x = x\}$$
2. L'*orbite de $x$* est le sous-ensemble de $E$
$$\mathcal{O}_x = \{g \cdot x \,|\, g \in G\}$$

**Proposition 1.1.**
1. *Le stabilisateur $G_x$ de $x$ est un sous-groupe de $G$.*
2. *L'ensemble des orbites de l'action de $G$ forme une partition de $E$.*

**Exercice 2.** Prouver la proposition et montrer que l'intersection $\bigcap_{x\in E} G_x$ de tous les stabilisateurs est le noyau du morphisme $\mathscr{A} : G \to \mathfrak{S}(E)$ canoniquement associé à l'action de $G$ sur $E$.

**Définition 1.3.** Soit $G$ un groupe opérant sur un ensemble non-vide $E$.

1. On dit que l'action est *libre*, si pour tout $x \in E$, $G_x = \{e\}$
2. On dit que l'action est *fidèle* si $\bigcap_{x\in E} G_x = \{e\}$
3. On dit que l'action est *transitive* si elle n'a qu'une seule orbite.
4. On dit que l'action est *simplement transitive* si elle est libre et transitive.
5. On dit que $x$ est un *point fixe* de l'action si pour tout $g$, $g \cdot x = x$.

*Remarques* 1.1. 1) Une action libre est fidèle, mais la réciproque est bien sûr fausse (chercher des contrexemples !)
2) Une action est transitive si et seulement si pour tout $(x, y) \in E^2$ il existe $g$ tel que $y = gx$, si et seulement s'il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{O}_x = E$.
3) Une action est simplement transitive si pour tout $(x, y) \in E^2$, il existe un unique $g$ tel que $y = gx$.
4) Une action libre et une action transitive n'ont pas de points fixes.

*Exemples* 1.2. 1) $\mathfrak{S}_n$ agit transitivement sur $\{1, ..., n\}$.
2) $\mathbb{Z}^n$ agit librement sur $\mathbb{R}^n$ par translation.
3) $GL_n(\mathbb{Z})$ agit fidèlement sur $\mathbb{Z}$. L'action est-elle libre ? Est-elle transitive ?

**Exercice 3.** Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \neq 0 \right\}$. Décrire les orbites de $G$ pour son action naturelle sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 4.** Montrer que $GL(n, \mathbb{R})$ agit sur l'ensemble $\mathcal{B}$ des bases de $\mathbb{R}^n$. Cette action est-elle libre ? fidèle ? transitive ?

**Exercice 5.** Notons $G$ l'ensemble des applications $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

1. Vérifier que $G$ est sous-groupe de $\mathfrak{S}(\mathbb{C})$.
2. Décrire les orbites de l'action de $G$ sur $\mathbb{C}$. L'action est-elle transitive ?
3. Décrire le stabilisateur de tout point. L'action est-elle libre, fidèle ?

**Définition 1.4.** On dit que l'action de $G$ sur $E$ est *$n$-transitive* si l'action induite de $G$ sur $E^n$ est transitive.

## 2 Action d'un groupe sur lui-même

**Exercice 6.** On considère l'action d'un groupe $G$ non trivial sur lui-même par translation à gauche :

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x = gx \end{array}$$

Montrer que l'action est fidèle, transitive et sans point fixe.

**Théorème 2.1** (Théorème de Cayley)**.** *Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe de son groupe des permutations* $\mathfrak{S}(G)$

**Exercice 7.** Prouver le théorème en utilisant l'exercice 7.

*Remarque* 2.1. En particulier tout groupe fini d'ordre $n$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}(n)$.

**Exercice 8.** On considère l'action d'un groupe $G$ sur lui-même par conjugaison :

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x = gxg^{-1} \end{array}$$

On rappelle que le centralisateur d'un groupe $G$ est le groupe noté $Z(G) := \{z \in G \,|\, gz = zg \forall g \in G\}$.

1. Montrer que l'action est fidèle si et seulement si $Z(G) = \{e\}$.
2. Déterminer les éventuels points fixes de l'action
3. L'action est-elle transitive ?

*Exemple* 2.1. L'orbite d'une matrice inversible $A$ pour l'action de $GL_n(\mathbb{R})$ par conjugaison est l'ensemble des matrices semblables à $A$.

*Remarque* 2.2. Le groupe $GL_n(\mathbb{Z})$ agit en fait sur $M_n(\mathbb{Z})$ par conjugaison. La théorie de la réduction des endomorphismes consiste à étudier les classes d'équivalence de $M_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 9.** On considère l'action d'un groupe $G$ sur l'ensemble de ses parties $\mathscr{P}(G)$ par conjugaison :

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathscr{P}(G) & \to & \mathscr{P}(G) \\ (g, X) & \mapsto & g \cdot X = gXg^{-1} \end{array}$$

où $gXg^{-1} = \{gxg^{-1}; x \in X\}$.

1. Montrer que l'action est fidèle si et seulement si $Z(G) = \{e\}$.
2. L'action est-elle transitive ?

## 2.1 Indice des stabilisateurs et équation aux classes

**Théorème 2.2.** *Soit $G$ un groupe opérant sur un ensemble $E$. Pour tout $x \in E$, le cardinal de l'orbite $\mathcal{O}_x$ de $x$ est l'indice de son stabilisateur $G_x$ :*

$$|\mathcal{O}_x| = [G : G_x]$$

*En particulier, si $G$ est fini, $|\mathcal{O}_x|$ divise $|G|$.*

**Corollaire 2.1.** *Soit $G$ un groupe opérant sur un ensemble fini $E$. Soit $\{x_i\}_{1 \leq i \leq r}$ une famille de représentants des orbites distinctes. Alors*

$$|E| = \sum_{i=1}^{r} [G : G_{x_i}]$$

**Exercice 10.** Prouver le théorème et son corollaire.

**Exercice 11.** 1. Soit $G$ un groupe fini d'ordre 33 opérant sur un ensemble $E$ fini de cardinal 19. Montrer que l'action admet des points fixes.

2. Soit $G$ un groupe fini d'ordre 15 opérant sans point fixe sur un ensemble $E$ fini de cardinal 17. Donner le nombre d'orbites et le cardinal de chacune d'elles.

**Exercice 12.** Le bute de l'exercice est de prouver le théorème de Cauchy :

*Si l'ordre d'un groupe $G$ est divisible par le nombre premier $p$, alors $G$ contient un élément d'ordre $p$.*

Considérons l'ensemble $E = \{g = (g_1, \ldots, g_p) \in G^p \mid g_1 g_2 \cdots g_p = e\}$

1. Montrer que $E$ est en bijection avec $G^{p-1}$.
2. Vérifier que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit sur $E$ via

$$A : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times E \to E,\ (\bar{k}, (g_1, \ldots, g_p)) \to (g_{1+k \mod p}, \ldots, g_{p+k \mod p}).$$

3. En déduire que $|E| = n + mp$ où $n$ est le nombre de points fixes de $A$.
4. Montrer que $p$ divise $n$ et conclure.

## 3 Le groupe symétrique $\mathfrak{S}(n)$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$. Considérons l'action naturelle du sous-groupe $\langle\sigma\rangle$ sur $[\![1, n]\!]$ par

$$\sigma^k \cdot j = \sigma^k(j).$$

On appelle $\sigma$-orbite une orbite pour cette action.

**Exercice 13.** Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 8 & 9 & 10 & 11 & 7 \end{pmatrix}$

1. Décrire l'orbite et le stabilisateur de chaque entier $k \in [\![1, 11]\!]$ pour l'action naturelle de $\langle\sigma\rangle$ sur cet ensemble.
2. En déduire une décomposition de $\sigma$ en cycles à supports disjoints.

**Exercice 14.** Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ et $O \subset [\![1, n]\!]$ une $\sigma$-orbite de cardinale $m \geq 2$. Montrer que pour tout $j \in O$,

$$O = \{\sigma^k(j) \mid 0 \leq k \leq m - 1\}.$$

**Théorème 3.1.** *Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(n$ est un cycle si et seulement si elle n'a qu'une seule orbite non réduite à un point.*

**Définition 3.1.** Le support d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ est l'ensemble $\{k \in [\![, b]\!] \mid \sigma(k) \neq k\}$.

Deux cycles sont dit disjoints si leurs supports sont disjoints

**Théorème 3.2.** *Toute permutation se décompose en produit de cycles disjoints et cette décomposition est unique à l'ordre près.*

**Exercice 15** (Preuve du théorème)**.** On considère la partition en orbites $O_1 \sqcup \cdots \sqcup O_p$ de $[\![1, n]\!]$. Soit $q \leq p$ tel que les orbites $O_i$ pour $1 \leq i \leq q$ soient de cardinal $> 1$ et les orbites $O_i$ pour $i > q$ de cardinal 1.

1. Posons pour $1 \le i \le q$,
$$\gamma_i(j) = \begin{cases} \sigma(j) \text{ si } j \in O_i \\ j \text{ sinon} \end{cases}$$
Vérifier que $\gamma_i$ est un cycle de support $O_i$.
2. Vérifier que $\sigma = \prod_{i=1}^{q} \gamma_i$.
3. Soit $\sigma = \prod_{j=1}^{q'} \gamma'_i$ une autre décomposition de $\sigma$ en cycles disjoints. Montrer que $q' = q$ et que pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, il existe un unique $j \in [\![1, q]\!]$ tel que $\gamma'_i = \gamma_j$.

**Théorème 3.3.** *Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ s'écrit comme un produit de transpositions.*

**Exercice 16.** Prouver le théorème. On pourra commencer par montrer que tout cycle s'écrit comme un produit de transposition.

**Définition 3.2.** On appelle *signature d'une permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ le nombre noté $\varepsilon(\sigma) := (-1)^{n-\mu(\sigma)}$ où $\mu(\sigma)$ est le nombre de $\sigma$-orbites distinctes de $\sigma$

*Remarque* 3.1. La signature d'une permutation est un élément de $\{-1, 1\}$.

**Exercice 17.**
1. Montrer que $\varepsilon(\mathrm{Id}) = 1$
2. Montrer que si $\tau$ est une transposition $\varepsilon(\tau) = -1$
3. Montrer que si $\sigma$ est un cycle de longueur $k$, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}$.

**Théorème 3.4.** *Si $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ est le produit de $p$ transposition, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$*

*Remarque* 3.2. Il n'y a pas unicité d'une décomposition d'une permutation en transposition, ni même du nombre de permutations. Néanmoins, ce nombre a toujours la même parité.

**Théorème 3.5.** *Les seuls morphismes de groupes de $(\mathfrak{S}(n), \circ)$ vers le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont la signature et le morphisme trivial.*

**Exercice 18** (Preuve du théorème 3.5)**.**
1. Vérifier que la signature est un morphisme.
2. Soit $\varphi : \mathfrak{S}(n) \to \mathbb{R}^*$ un morphisme.
   (a) Montrer que pour tout transposition $\tau$, $\varphi(\tau) \in \{-1, 1\}$
   (b) Montrer que si $\tau_1, \tau_2$ sont deux transpositions $\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2)$ (*autrement dit $\varphi$ est constant sur les transpositions*).
   (c) Conclure