

TD $n^{\circ}5$: EXTENSIONS CYCLIQUES ET EXTENSIONS ABÉLIENNES

Exercice 1. 1. Soit N une extension abélienne d'un corps K . Montrer que toute extension intermédiaire L est une extension abélienne de K .

2. Donner un exemple extension abélienne non cyclique de $\mathbb{Q}$.
3. Donner un exemple d'extension normale de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas abélienne.

Exercice 2. Soit N le corps de décomposition de $X^6 - 2$ sur $\mathbb{Q}$.

1. Déterminer N et montrer que $[N : \mathbb{Q}] = 12$.
2. En déduire que $\text{Gal}(N|\mathbb{Q}(j))$ est cyclique.

Exercice 3. Soient $n \geq 1$, ζ une racine primitive n -ième de l'unité. Soient $K \subset \mathbb{C}$ un corps contenant ζ et L une extension cyclique de K de degré n .

Soit σ un générateur de $\text{Gal}(L|K)$; on considère σ comme un endomorphisme du K -espace vectoriel L et on note $\text{Sp}(\sigma)$ son spectre.

1. Montrer que σ est diagonalisable.
2. Montrer $\text{Sp}(\sigma) = \mathbb{U}_n$, groupe des racines n -ièmes de l'unité.
3. Montrer qu'il existe b dans L tels que $b^n \in K$ et $L = K(b)$.

Exercice 4. Soient $p, q \in \mathbb{Q}$ non nuls tels que $P := X^3 + pX + q$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. On note a, b, c les racines de P dans $\mathbb{C}$ et d tel que $d^2 = -4p^3 - 27q^2$. Posons $L = \mathbb{Q}(j, d)$ et $N = L(a, b, c)$.

1. Déterminer les valeurs possibles de $[L : \mathbb{Q}]$.
2. En déduire que $[L(a, b, c) : L] = 3$.
3. Montrer que $\{1, a, b\}$ est une base de N sur L .

Soit $G = \text{Gal}(N|L)$. On sait que $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Un élément σ de G est considéré comme un endomorphisme du L -espace vectoriel N .

4. Donner les éléments primitifs σ_1, σ_2 de G et leurs matrices dans la base $(1, a, b)$.
5. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de σ_1 et σ_2 .

Exercice 5. Soient $K \subset \mathbb{C}$ et $L \subset \mathbb{C}$ une extension normale de degré fini de K . Soit $a \in L$ et soit $L' \subset L$ la clôture normale de $K(a)$. Soit $\mu : L \rightarrow L : x \mapsto ax$ et $\mu' := \mu|_{L'}$ la restriction de μ à L' .

1. Soit $P := \sum_{k=0}^m \alpha_k X^k$ le polynôme minimal de a sur K . Exprimer $N_{L'/K}(a)$ en fonction de $\alpha_0, \dots, \alpha_m$.
2. Montrer que $N_{L'/K}(a) = \det(\mu')$.
3. En déduire que $N_{L/K}(a) = \det(\mu)$.