

TD $n^\circ 3$: $\mathbb{K}$ -HOMOMORPHISMES, EXTENSIONS NORMALES

Exercice 1. 1. Déterminer les $\mathbb{Q}$ -automorphismes de $\mathbb{Q}[i]$ et $\mathbb{Q}[j]$.

Exercice 2. 1. Déterminer les $\mathbb{Q}$ -automorphismes de $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Vérifier que $\mathbb{K} := \bigcup_{1 \leq n} \mathbb{Q}[\sqrt[n]{2}]$ est une extension de $\mathbb{Q}$. Est-elle algébrique ?

3. Déterminer les $\mathbb{Q}$ -automorphismes de $\mathbb{K}$.

Exercice 3. Pour chacun des corps suivants, déterminer les sous-corps de $\mathbb{C}$ qui lui sont $\mathbb{Q}$ -isomorphes :

1. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$
2. $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{15}]$
3. $\mathbb{Q}[\sqrt[5]{3}]$
4. $\mathbb{Q}[\sqrt[6]{3}]$.

Exercice 4. 1. Soient $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ un corps, a et b deux éléments de $\mathbb{K}$. Montrer que si $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est non nul, c'est un élément primitif de $\mathbb{K}[\sqrt{a}, \sqrt{b}]$.

2. Montrer que $j\sqrt{5}$ est un élément primitif de $\mathbb{Q}[j, \sqrt{5}]$.

Exercice 5. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]$.

1. Vérifier que $2^{\frac{1}{6}}$ est un élément primitif de $\mathbb{K}$
2. Déterminer les $\mathbb{Q}$ -automorphismes de $\mathbb{K}$.
3. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ est un élément primitif de $\mathbb{K}$.
4. Existe-t-il d'autres éléments primitifs ?

Exercice 6. Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$.

1. Soient α, β les racines de P dans $\mathbb{C}$. Montrer que $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$.
2. En déduire qu'une extension de degré 2 de $\mathbb{Q}$ est normale. Qu'en est-il d'une extension de degré supérieur ?

Exercice 7. Soient $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ une extension normale de degré fini de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ une extension quelconque de $\mathbb{K}$. Soit $\mathbb{N}' \subset \mathbb{C}$ l'extension de $\mathbb{N}$ engendrée par $\mathbb{L}$ et $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{N}'$ est une extension normale de $\mathbb{L}$.

Exercice 8. Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $P := X^3 + pX + q$ un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$. Le discriminant de P est $\delta = -4p^3 - 27q^2$. On note a, b, c les racines de P dans $\mathbb{C}$ et $d = (a - b)(b - c)(c - a)$.

1. Montrer que le corps de décomposition de P est $\mathbb{K}(a, d)$.
2. Montrer que $d^2 = \delta$, en déduire $[\mathbb{K}(a, d) : \mathbb{K}]$.
3. Montrer que $[\mathbb{K}(a, d) : \mathbb{K}] = 3$ si $d \in \mathbb{K}$ et $[\mathbb{K}(a, d) : \mathbb{K}] = 6$ sinon. L'extension $\mathbb{K}(a)$ est-elle normale ?
4. On considère maintenant le cas $p = -3$ et $q = 1$. Montrer que $\mathbb{K}(a)$ est une extension normale de $\mathbb{K}$ et exprimer b et c dans la base $\{1, a, a^2\}$.