TD $n^\circ 1$: Anneaux, corps, polynômes

Exercice 1. Soit A un anneau. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $n \cdot 1_A := 1_A + \cdots + 1_A$ où la somme a k termes. La *caractéristique* car(A) *d'un anneau* A est, s'il existe, le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \cdot 1_A = 0_A$; sinon, on dit que la caractristique de A est nulle.

1. Soit A un anneau. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $\phi : \mathbb{Z} \to A$ et que pour $k \in \mathbb{N}$, $\phi(k) = k \cdot 1_A$. Montrer que $\ker \phi = n\mathbb{Z}$ où $n = \mathrm{car(A)}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner deux exemples d'anneaux de caractéristique n.
3. Monter que si A est intègre, ou bien $\mathrm{car(A)} = 0$ ou bien $\mathrm{car(A)} \in \mathbb{P}$.
4. On appelle *sous-anneau premier* d'un anneau A l'intersection de tous les sous-anneaux de A. Vérifier que c'est le plus petit (pour l'inclusion) anneau contenu dans A et qu'il est égal à $\operatorname{Im} \phi$.
5. Soit $\mathbb{K}$ un corps. On note $A_{\mathbb{K}}$ le sous-anneau premier de $\mathbb{K}$.
   (a) Monter que si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$, $A_{\mathbb{K}}$ est isomorphe $\mathbb{Z}$ et que si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = \mathrm{p} > 0$, $A_{\mathbb{K}}$ est isomorphe $\mathbb{F}_p$.
   (b) Le *sous-corps premier de* $\mathbb{K}$ est l'intersection de tous les sous-corps de $\mathbb{K}$. Vérifier que c'est le plus petit (pour l'inclusion) sous-corps de $\mathbb{K}$. Montrer que c'est le corps des fractions de $A_{\mathbb{K}}$.

Exercice 2. Soit A un anneau de caractéristique $p > 0$. Montrer que pour a, b dans A, on a $(a+b)^p = a^p + b^p$.

Exercice 3. Soient p, q deux réels non nuls et a, b, c les racines de $X^3 + pX + q$.

1. Montrer que a, b et c sont non nuls et qu'au moins l'un des nombres a, b ou c est réel.
2. Déterminer en fonction de p et q, les coefficients du polynôme dont les racines sont $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$ et $\frac{1}{c^2}$.

Exercice 4. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $P \in \mathbb{K}[X]$. On pose $n = d^\circ P$. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{K}$ si et seulement si P n'admet aucune racine dans une extension de degré $\leq \frac{n}{2}$ de $\mathbb{K}$.

En déduire un critère d'irréductibilité simple pour les polynômes de degré 2 ou 3.

Exercice 5. 1. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{k}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$. Montrer que $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel.

2. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{P}$ et $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{Card} \mathbb{K} = p^d$.

Exercice 6. 1. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer qu'on a ́quivalence entre

   (i) P est irréductible dans $\mathbb{K}$
   (ii) Pour tout $a \in \mathbb{K}$, $P(X+a)$ est irréductible
   (iii) Il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que $P(X+a)$ est irréductible.

2. Soit $p \in \mathbb{P}$ et $P = \sum_{k=0}^{p-1} X^k \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que P est irréductible.

Exercice 7. 1. Étudier l'irréductibilité de X^6+3 dans $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{Q}[j][X]$ et $\mathbb{Q}[i][X]$.

2. (a) Étudier l'irréductibilité de X^4+1 dans $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) Factoriser X^4+1 en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[\zeta][X]$, où ζ est une racine de ce polynôme.

Exercice 8. La clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ est-elle de degré fini ?

Exercice 9. Déterminer les automorphismes de $\mathbb{Q}$ et ceux de $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Soit $\mathbb{K}$ un corps tel que X^2+X+1 est irréductible sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}=\mathbb{K}[X]/\langle X^2+X+1\rangle$. On note $x=\pi(X)$ où $\pi:\mathbb{K}[X]\to\mathbb{L}$ est la projection.

1. Montrer que $\mathbb{L}:=\{a+bx\,|\,(a,b)\in\mathbb{K}^2\}$.

2. On suppose maintenant $\mathbb{K}=\mathbb{F}_2$

   (a) Vérifier que X^2+X+1 est irréductible sur $\mathbb{F}^2$.
   (b) Décrire le corps Ł. Soit $\sigma:\mathbb{L}\to\mathbb{L}:a+bx\mapsto a+b+bx$. Montrer que σ est un $\mathbb{F}_2$-automorphisme de $\mathbb{L}$.