TD $n°6$: Changement de variable

Exercice 1. Soit f est une fonction λ-intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n := \int_0^\infty \frac{nf(nx)}{1+x^n} dx$$

Déterminer $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Exercice 2 (Coordonnées polaires et sphériques)**.**

1. Vérifier que les applications suivantes sont des C^1-difféomorphismes, calculer leurs différentielles et leurs jacobiens.
   (a) Coordonnées polaires :

$$\begin{array}{cccc} \Phi: &]0,+\infty[\times]0,2\pi[& \mapsto & \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0,\ y = 0\} \\ . & (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

   (b) Coordonnées sphériques :

$$\begin{array}{cccc} \Psi: & \mathbb{R}_+^*\times]0,\pi[\times]0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y = 0\}, \\ & (r,\theta,\phi) & \mapsto & (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta). \end{array}$$

2. Retrouver l'aire d'un disque de rayon r dans $\mathbb{R}^2$ et d'une boule de rayon r dans $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer le volume d'une boule de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 (Volume d'un tore de révolution)**.** On cherche à calculer le volume du *tore plein* $\mathscr{T}$ obtenu en faisant tourner le disque d'équation : $(y-3)^2 + z^2 \leq 1, \quad x = 0$ autour de l'axe Oz.

1. Tracer $\mathscr{T}$.
2. Vérifier que $\mathscr{T}$ est l'image de l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & [0,1]\times[0,2\pi]\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (r,\theta,\varphi) & \mapsto & \big((3+r\cos\theta)\cos\varphi,\ (3+r\cos\theta)\sin\varphi, r\sin\theta\big). \end{array}$$

3. Vérifier que Φ est de classe C^1 et calculer sa différentielle et son jacobien.
4. Vérifier que la restriction de Φ à $U =]0,1[\times]0,2\pi[\times]0,2\pi[$ est un C^1-difféomorphisme sur son image.
5. Calculer le volume de $\Phi(U) \subset \mathscr{T}$.
6. Expliciter l'ensemble $\mathscr{T} \setminus \Phi(U)$ et justifier que le volume du tore est celui de $\Phi(U)$.

Exercice 4.

1. Soit $A := [0,1] \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}^*}]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$. Déterminer $\lambda(A)$.
2. Calculer, pour $y \geq 0$, la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(y+n)^2 + (y+n)}$.
3. Soit $T\colon]0,1[\mapsto [0,1[$ définie par $T(x) = 1/x - E(1/x)$. Montrer que pour tout $f \in L^1([0,1],\lambda)$ on a

$$\int_0^1 \frac{f(T(x))}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx.$$

Exercice 5. Soit $M := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dans $\mathbb{R}^2$, notons $a = (0,0), b = (\frac{1}{2}, 0), c = (1,0), d = (1,1), e = (\frac{1}{2}, 1)$ et $f = (0,1)$. Soit $T_{abf}, T_{bcf}, T_{cef}$ et T_{cde} les triangles **ouverts** et $T'_{abf}, T'_{bcf}, T'_{cef}$ et T'_{cde} leurs images respectives par M.

1. Dessiner les triangles $T_{abf}, T_{bcf}, T_{cef}$ et T_{cde} et leurs images $T'_{abf}, T'_{bcf}, T'_{cef}$ et T'_{cde}.
2. Soit $\Delta = T'_{abf} \cup (T'_{bcf} - (1,0)) \cup (T'_{cef} - (1,1)) \cup (T'_{cde} - (2,1))$. Montrer que $\Delta \subset [0,1]^2$ et déterminer $\lambda_2(\Delta)$.
3. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathbb{Z}^2$-périodique, c'est-à-dire que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ et tout $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{\mathbf{2}}$, $f(u + \mathbf{k}) = f(u)$ et intégrable sur $[0,1]^2$. Montrer que
$$\int_{[0,1]^2} f(Mx) d\lambda_2(x) = \int_{[0,1]^2} f(x) d\lambda_2(x).$$

Exercice 6. On cherche à calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt$.

1. Montrer que $t \to \frac{\ln(t)}{1-t}$ est intégrable sur $]0,1[$ pour la mesure de Lebesgue.
2. Justifier que $J = \displaystyle\int_{]0,1[^2} \frac{1}{1-xy} d\lambda_2(x,y) = \sum_{n \geq 0} \int_{]0,1[^2} x^n y^n d\lambda_2(x,y)$.

Soit ϕ définie sur $]0,+\infty[^2$ par $\phi(s,t) = (s, \frac{t}{s})$.

3. Déterminer $\Delta = \phi^{-1}(]0,1[^2)$et le tracer.
4. Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme de Δ sur $]0,1[^2$.
5. Effectuer le changement de variable $\phi(s,t) = (x,y)$ dans J.
6. Conclure.