
 TD $n^\circ 5$: MESURES PRODUIT ET THÉORÈME DE FUBINI

Exercice 1 (Produit de mesures de Dirac). Soit $(X, \mathcal{M}_X)$ et $(Y, \mathcal{M}_Y)$ deux espaces mesurés et $(a, b) \in X \times Y$. Montrer que sur l'espace mesuré $(X \times Y, \mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_Y)$, $\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}$.

Exercice 2 (Les tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d)$). Soit d, j, k des entiers tels que $d = j + k$.

1. Vérifier que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^j)$.
2. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^k)$, $A \times \mathbb{R}^j \in \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d)$. **Indication** : on pourra écrire $A = B \cup N$ où B borélien et N de mesure nulle.
3. En déduire que $\mathcal{M}_L(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^j) \subset \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d)$
4. Soit $A \subset \mathbb{R}^k$ un ensemble non λ_k -mesurable. Montrer que $A \times \{0\} \in \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d)$.
5. En déduire que l'inclusion de la question 3) est stricte.

Exercice 3. Soit $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x^2 + y^2)(1 + z^2) \leq 1\}$.

1. Montrer que $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$.
2. Calculer $\mu(B)$ pour $\mu = \delta_0 \otimes \delta_0 \otimes \delta_0$, $\delta_0 \otimes \delta_0 \otimes \lambda$, $\delta_0 \otimes \lambda \otimes \lambda$, $\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda$.

Exercice 4. Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes (où $\alpha \in \mathbb{R}$) :

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(y)$ | 3. $f :]0, 1[^2 \rightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto x^y$ | 5. $f :]0, +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto \frac{1}{(1+x+y)^\alpha}$ |
| 2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x)$ | 4. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto \frac{\sin(xy)}{xy}$ | 6. $f :]0, 1[^3 \rightarrow \mathbb{R}$
$(x, y, z) \mapsto \frac{yz}{x}$ |

Exercice 5. 1. Montrer que $(x, y) \mapsto e^{-y} \sin(2xy)$ est intégrable sur $[0, 1] \times [0, +\infty[$.

2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin y)^2}{y} e^{-y} dy$.

Exercice 6. Soient a, b et L trois réels tels que $0 < a < b$ et $L > 0$.

1. Étudier l'intégrabilité de l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin(xy)\mathbf{1}_{[0,L] \times [a,b]}(x, y)$,
2. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx = \ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1. Montrer que

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dy \right) dx.$$

2. Montrer que f n'est pas intégrable sur $[0, 1] \times [0, 1]$. Est-elle intégrable sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$?

Exercice 8. Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable. Posons

$$\begin{aligned} F : X \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto (f(x), y) \end{aligned}$$

1. Montrer que F est mesurable pour la tribu produit $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.
2. En déduire que les ensembles $G = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ et $\Gamma = \{(x, y) \mid 0 \leq y < f(x)\}$ sont contenus dans $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_1$.
3. Soient μ une mesure σ -finie sur $(X, \mathcal{M})$. Montrer que

$$\int_X f d\mu = \mu \otimes \lambda(\Gamma) = \int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f > y\}) d\lambda(y).$$

Exercice 9. Soit $0 < \ell \leq L$ deux réels et $R := [0, L] \times [0, \ell]$. Supposons qu'il existe une partition de R par une famille finie de cellules $C_i := [a_i, b_i[\times [c_i, d_i[$ telles que pour tout i , $b_i - a_i \in \mathbb{N}$ ou $d_i - c_i \in \mathbb{N}$. Montrer que l'un au moins des réels ℓ ou L est entier.