TD $n°4$: FONCTIONS MESURABLES ET INTÉGRATION

Exercice 1. Soit X un ensemble.

1. Soit $a \in X$. On considère l'espace mesuré $(X, \mathscr{P}(X), \delta_a)$ où δ_a est la mesure de Dirac en a. Montrer que toute fonction $f : X \to \mathbb{C}$ est intégrable et déterminer son intégrale.
2. Soit $a_1, \ldots a_k$ dans X et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ des nombres réels positifs. Vérifier que l'application
$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathscr{P}(X) & \to & \mathbb{R}^+ \\ & A & \mapsto & \sum_{i=1}^k \alpha_i \delta_{a_i}(A) \end{array}$$
est une mesure.
3. Vérifier sur toute fonction $f : X \to \mathbb{C}$ est μ-intégrable et déterminer son intégrale.

Exercice 2 (Mesure complétée II)**.** Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(X, \widehat{\mathcal{M}}, \mu)$ son complété où, par abus de notation, on note encore μ la mesure sur $\widehat{\mathcal{M}}$.

1. Vérifier que toute fonction $\mathcal{M}$-mesurable est $\widehat{\mathcal{M}}$-mesurable.

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ une fonction $\widehat{\mathcal{M}}$-mesurable, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$. On veut montrer qu'il existe g $\mathcal{M}$-mesurable et $N \in \mathscr{M}$ de mesure nulle telle que $f = g$ sur $X \setminus N$.

2. Montrer le résultat pour f étagée.
3. Montrer le résultat pour f à valeurs dans $[0, +\infty]$.
4. En déduire le cas général.

En particulier si $X = \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}$ muni de la tribu de Lebesgue, une fonction mesurable est presque partout égale à une fonction borélienne.

Exercice 3 (Théorème de transfert)**.** Soit $(X, \mathcal{M}_X, \mu)$ un espace mesuré, Y un espace topologique et $\varphi : X \to Y$ une application mesurable.

1. Vérifier que l'application
$$\begin{array}{rccc} \phi_*\mu : & \mathcal{B}(Y) & \to & [0, +\infty] \\ & A & \mapsto & \mu(\phi^{-1}(A)) \end{array}$$
définit une mesure sur $(Y, \mathcal{B}(Y))$. On l'appelle *mesure image par ϕ.*
2. Montrer que si $f : Y \to [0, +\infty]$ est borélienne, alors
$$\int_Y f d\phi_*\mu = \int_X f \circ \varphi d\mu$$
On pourra, commencer par supposer f étagée.
3. Soit $f : Y \to \mathbb{C}$ $\mu_*\varphi$-mesurable. Montrer que f est intégrable si et seulement si $f \circ \varphi$ est μ-intégrable et qu'alors
$$\int_Y f d\phi_*\mu = \int_X f \circ \varphi d\mu.$$

Exercice 4 (Théorème d'Egorov)**.** Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $X \to \mathbb{C}$ qui converge simplement vers une fonction f. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Notons $A_{n,k} := \{x \in X \,|\, |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}$ et $B_{n,k} := \bigcup_{j \geq n} A_{j,k}$. Montrer qu'il existe un entier $n(k)$ tel que $\mu(B_{n(k),k}) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$.
2. En déduire qu'il existe A_ε tel que
   — $\mu(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$
   — Sur $X \setminus A$, la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

Pour aller plus loin

Exercice 5 (Convergence en mesure)**.** Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $X \to \mathbb{C}$ et $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable. On dit que la suite $(f_n)_n$ *converge vers f en mesure* si pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X \,|\, |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

1. Montrer que si X est de mesure finie et si $(f_n)_n$ tend vers f μ-presque partout, alors $(f_n)_n$ tend vers f en mesure. Que dire de la réciproque ?
2. Montrer que si $(f_n)_n$ tend vers f en mesure, il existe une sous-suite $(f_{\psi(n)})_n$ qui converge f μ-presque partout.
3. Montrer que si $||f_n - f||_1 \to 0$, alors $(f_n)_n$ converge vers f en mesure. Que dire de la réciproque ?

Exercice 6 (Familles sommables)**.** Soit un X ensemble et $\mu : \mathscr{P}(X) \to \mathbb{N} \cap \{\infty\}$ la mesure de comptage.

1. Justifier que toute fonction $X \to \mathbb{C}$ est mesurable.

Soit I un ensemble et $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres réels positifs. On note $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties **finies** de I. La *somme* de la famille $(a_i)_{i\in I}$ notée $\sum_I a_i$ est définie par

$$\sum_I a_i := \sup\{\sum_{i\in J} a_i \,|\, J \in \mathscr{P}_f(I)\} \in [0, +\infty]$$

On dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est *sommable* si $\sum_I a_i < +\infty$.

2. Soit φ est étagée à valeurs réelles positives. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes
   i) φ est intégrable
   ii) l'ensemble $\{x \in X \,|\, \varphi(x) \neq 0\}$ est fini
   iii) la famille $(\varphi(x))_{x\in X}$ est sommable

   En déduire que pour tout fonction étagée positive, $\int_X \varphi d\mu = \sum_{x\in X} \varphi(x)$.

Soit $f : X \to [0, +\infty]$.

3. Montrer que si f est intégrable $f^{-1}(\{\infty\}) = \emptyset$.
4. Soit φ étagée positive telle que $\varphi \leq f$. Vérifier que $\sum_{x\in X} \varphi(x) \leq \sum_{x\in X} f(x)$.
5. Soit $J \subset X$ une partie finie. Montrer qu'il existe une fonction étagée φ_J telle que $\sum_{x\in J} f(x) = \int_X \varphi_J d\mu$
6. Déduire de ce qui précède que f est intégrable si et seulement si la famille $(f(x))_{x\in X}$ est sommable et qu'alors et qu'alors $\int_X f d\mu = \sum_{x\in X} f(x)$.

En particulier une série de terme général $u_n \in \mathbb{R}^+$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est intégrable pour la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et une série de terme général $z_n \in \mathbb{C}$ de nombres complexes est absolument *convergente si et seulement si la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est intégrable pour la mesure de comptage.*