TD $n°2$: MESURE DE LEBESGUE SUR $\mathbb{R}^d$

Exercice 1. On considère la mesure de Lebesque λ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\lambda(\mathbb{R} \times \{0\}) = 0 = \lambda(\{0\} \times \mathbb{R})$.
2. Soit $I_1 = [0,1] \times \{0\}$ et $I_2 = \{0\} \times [0,1]$. Que vaut $\lambda(I_1 + I_2)$?
3. A-t-on un analogue de ce phénomène dans $\mathbb{R}$? **Indication :** revoir l'exercice 5 de la feuille 1.

Exercice 2. Reprenons les notations de l'exercice 4 feuille 1 : pour $p \in \mathbb{N}^*$, $O_p := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]q_n - \frac{1}{p2^{n+1}}, q_n + \frac{1}{p2^{n+1}}[$ et $\mathcal{Q} = \bigcap_p O_p$, où $\{q_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$. Calculer $\lambda(\mathcal{Q})$.

Exercice 3 (Nombres liouvilliens et diophantiens II)**.** Rappelons que

— $\mathcal{D}(\tau, c) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, \forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times N^*, |x - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^\tau}\}$.

— $\mathcal{D}(\tau) := \bigcup_{c>0} \mathcal{D}(\tau, c)$, l'ensemble des *nombres diophantiens d'exposant* τ,

— $\mathcal{D} := \bigcup_{\tau>0} \mathcal{D}(\tau)$ l'ensemble des *nombres diophantiens*,

— $\mathcal{L} := (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \setminus \mathcal{D}$, l'ensemble des *nombres liouvilliens*.

Soit $\tau > 2$ fixé.

1. Montrer que $[0,1] \setminus \mathcal{D}(\tau) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}^*} [0,1] \setminus \mathcal{D}(\tau, \frac{1}{m})$.
2. Montrer que
$$[0,1] \setminus \mathcal{D}(\tau, \tfrac{1}{m}) \subset \bigcup_{q\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{p=0}^{q}]\tfrac{p}{q} - \tfrac{1}{mq^\tau}, \tfrac{p}{q} + \tfrac{1}{mq^\tau}[$$
3. En déduire qu'il existe un réel positif $s(\tau)$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\lambda([0,1] \setminus \mathcal{D}(\tau, \frac{1}{m})) \leq \frac{1}{m} s(\tau)$.
4. En déduire $\lambda(\mathcal{D}(\tau) \cap [0,1]) = 1$. Que peut-on dire de $\lambda(\mathcal{L})$?

Exercice 4 (Ensembles de Cantor II)**.** On reprend les notations de l'exercice 3, feuille 1 : pour $\sigma := (s_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels de $]0,1[$, on note

$$K(\sigma, n) = D_{s_n} \circ D_{s_{n-1}} \circ \cdots \circ D_{s_1}([0,1]), \qquad K(\sigma) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K(\sigma, n)$$

où, pour $s \in]0,1[$, D_s est l'application qui à un intervalle $[a,b]$ associe l'union $[a, a+\frac{s}{2}(b-a)] \cup [b - \frac{s}{2}(b-a), b]$ étendue composante connexe par composante connexe à une réunion d'intervalles compacts deux à deux disjoints.

1. Déterminer $\lambda(K(\sigma, j))$ en fonction des $s_1, \ldots, s_j$.
2. En déduire $\lambda(K(\sigma))$.
3. Quelle est la mesure de $\mathcal{T}$?
4. On pose $s_j := 1 - \frac{1}{2^j}$. Montrer $\lambda(K(\sigma))$ est de mesure strictement positive.

Exercice 5 (Lemme de Borel-Cantelli)**.** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties mesurables de $\mathbb{R}^d$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n) < \infty$. Soit B l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $x \in A_n$ pour une infinité d'indices n. Montrer que B est mesurable et que $\lambda(B) = 0$.

Pour aller plus loin

Exercice 6 (Une partie non mesurable)**.** Notons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$: $x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Soit $(P_\alpha)_{\alpha\in A}$ la partition de $\mathbb{R}$ en les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

1. Justifier que A n'est pas dénombrable.

Pour $\alpha \in A$, on note $Q_\alpha =]0,1[\cap P_\alpha$.

2. Vérifier que la famille $(Q_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une partition de $]0,1[$.

L'axiome du choix donne l'existence d'une fonction de choix $\phi : A \to]0,1[$ telle que pour tout $\alpha \in A$, $\phi(\alpha) \in Q_\alpha$. Notons $B = \phi(A)$. On veut montrer que B n'est pas mesurable.

3. Justifier que pour tout $x \in]0,1[$, il existe $q \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[$ tel que $x \in q + B$.
4. Soit q, q' deux rationnels distincts. Montrer que $(q + B) \cap (q' + B) = \emptyset$.

Supposons que B est mesurable et notons $\widehat{B} := \bigcup_{q\in]-1,1[} q + B$.

5. Justifier que $\widehat{B}$ est mesurable et que $1 \leq \lambda(\widehat{B}) \leq 3$.
6. En déduire que $\lambda(B) = 0$
7. Conclure.