TD n°1 : DÉNOMBRABILITÉ

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologique à base dénombrable d'ouverts. Soit $\mathcal{T}$ la topologie produit sur $(X \times Y)$. Montrer que $(X \times Y, \mathcal{T})$ est à base dénombrable d'ouverts et en donner une base d'ouverts en fonction d'une base d'ouverts $(V_n)_n$ de X et d'une base d'ouverts $(W_n)_n$ de Y .

Exercice 2. Soit $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite de réels **positifs**. On dit que la série $\sum x_n$ est *commutativement convergente* si pour tout permutation $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la série de terme général $y_n = x_{\sigma(n)}$ est convergente. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

- i) $\sum x_n$ est commutativement convergente
- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est convergente
- iii) $\sup \left\{ \sum_{i \in J} x_i \mid J \text{ finie} \right\} < +\infty$.

Montrer qu'alors pour toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \sup \left\{ \sum_{i \in J} x_i \mid J \text{ finie} \right\}$.

Exercice 3 (Ensembles de Cantor I). 1. Montrer que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

2. Montrer que l'application Φ ci-dessous est injective :

$$\begin{aligned} \Phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} &\rightarrow [0, 1] \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2x_n}{3^{n+1}}. \end{aligned}$$

L'image de Φ , notée $\mathcal{T}$, est l'*ensemble triadique de Cantor*.

Soit $s \in]0, 1[$. On note D_s qui à un intervalle $[a, b]$ associe l'union (disjointe) $[a, a + \frac{s}{2}(b-a)] \cup [b - \frac{s}{2}(b-a), b]$. On étend l'application D_s à une réunion d'intervalles compacts deux à deux disjoints en posant

$$D_s(I_1 \cup \dots \cup I_k) = D_s(I_1) \cup \dots \cup D_s(I_k).$$

Soit $\sigma := (s_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels dans $]0, 1[$.

3. Soit I un intervalle compact. Déterminer le nombre de composantes connexes de $D_{s_j} \circ D_{s_{j-1}} \circ \dots \circ D_{s_1}(I)$.

On pose $K(\sigma, n) = D_{s_n} \circ D_{s_{n-1}} \circ \dots \circ D_{s_1}([0, 1])$.

4. Dessiner $K(\sigma, n)$ pour $n = 1, 2, 3$ et $\sigma = (\frac{1}{3^n})_{n \in \mathbb{N}}$.

5. On pose $K(\sigma) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K(\sigma, n)$. Justifier que $K(\sigma)$ est compact et non vide.

6. On reprend $\sigma = (\frac{1}{3^n})_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que $K(\sigma)$ est égal à $\mathcal{T}$. **Indication** : On pourra caractériser le développement en base 3 des éléments de $K(\sigma)$. En déduire que $[0, 1] \subset \mathcal{T} + \frac{1}{2}\mathcal{T}$.

Exercice 4. Un ensemble est dit *résiduel* s'il est intersection dénombrable d'ouverts denses. Un ensemble est dit *maigre* s'il est réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.

1. Vérifier que le complémentaire d'une partie résiduelle est une partie maigre et réciproquement.

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieurs vide de $\mathbb{R}$ et $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ et soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$.

2. Justifier qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ et $r_0 > 0$ tel que $]x_0 - r_0, x_0 + r_0[\subset]a, b[\setminus F_0$.

3. Justifier qu'il existe $x_1 \in]x_0 - r_0, x_0 + r_0[$ et $r_1 \in [0, r_0/2[$ tel que $]x_1 - r_1, x_1 + r_1[\subset]x_0 - r_0, x_0 + r_0[\setminus F_1$.

On construit ainsi par récurrence une suite d'intervalles emboîtés $(]x_n - r_n, x_n + r_n[)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$]x_{n+1} - r_{n+1}, x_{n+1} + r_{n+1}[\subset]x_n - r_n, x_n + r_n[\setminus F_n, \quad \text{et} \quad r_{n+1} < r_n/2.$$

4. Dédurre de ce qui précède que F est d'intérieur vide.

On vient de montrer que $\mathbb{R}$ satisfait la *propriété de Baire* : toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide, ou, de manière équivalente, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Exercice 5. 1. Vérifier que $\mathbb{Q}$ est maigre.

2. Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ une bijection. On note $q_n = \varphi(n)$. Montrer que φ ne peut pas être croissante : *On ne peut pas ordonner les rationnels.*

3. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $O_p := \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]q_n - \frac{1}{p2^{n+1}}, q_n + \frac{1}{p2^{n+1}}[$ et $\mathcal{Q} = \bigcap_p O_p$. Montrer que $\mathbb{Q} \subset \mathcal{Q}$. A-t-on égalité ?

Exercice 6 (Nombres diophantiens et liouvilliens I). Soit $\tau > 0$ et $c > 0$. Posons $\mathcal{D}(\tau, c)$ l'ensemble des réels x tels que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^\tau}$. On note

— $\mathcal{D}(\tau) := \bigcup_{c>0} \mathcal{D}(\tau, c)$, l'ensemble des *nombres diophantiens d'exposant τ* ,

— $\mathcal{D} := \bigcup_{\tau>0} \mathcal{D}(\tau)$ l'ensemble des *nombres diophantiens*.

1. Vérifier que $\mathcal{D} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$. On note $\mathcal{L} := (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \setminus \mathcal{D}$, l'ensemble des *nombres liouvilliens*.

2. Soit $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $x \in \mathcal{L}$ si et seulement si pour tous n, m dans $\mathbb{N}^*$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{mq^n}$.

3. En déduire que $\mathcal{L}$ est résiduel. Que peut-on dire de $\mathcal{D}$?

Exercice 7. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'ensemble des discontinuités de f est dénombrable.

Pour aller plus loin

Exercice 8. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. On définit la *somme* de la famille $(a_i)_{i \in I}$ par

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} a_i \mid J \subset I, J \text{ finie} \right\}.$$

On dit que la famille est *sommable* si sa somme est finie. Montrer que si $(a_i)_{i \in I}$ est sommable, l'ensemble des $i \in I$ telle que $a_i > 0$ est au plus dénombrable.

Exercice 9. On dit qu'un point $z = x + iy$ de $\mathbb{C}$ est *totalelement rationnel* si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$. Soient z et z' non totalelement rationnel, on veut montrer qu'il existe un cercle dans $\mathbb{C}$ qui les relie et qui ne contient que des points non *totalelement rationnel*. Pour cela :

1. Montrer que l'ensemble des points totalelement rationnels est dénombrable.

2. Montrer que l'ensemble des cercles passant par z et z' est indénombrable.

3. Montrer que l'ensemble des cercles passant par z, z' et un point totalelement rationnel est dénombrable. Conclure.

Exercice 10. On considère des suites à valeurs entières $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

2. On dit qu'une suite (u_n) est ultimement périodique s'il existe $N, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall k \geq N, u_{k+p} = u_k$. Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{P}$ des suites ultimement périodiques est dénombrable.

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{B}$ des suites bornées par N est indénombrable.

4. Le sous-ensemble des suites à valeurs entières qui sont strictement croissante est-t-il dénombrable ?