# TD $n°7$ : Distributions tempérées

**Exercice 1.** Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

1. Vérifier que $T_{\check{f}} = \check{T}_f$.
2. Vérifier que $T_f$ impaire si et seulement si $f$ impaire et que $T_f$ paire si et seulement si $f$ paire.
3. Vérifier que si $u$ est impaire $\mathscr{F}(u)$ est impaire et que si $u$ est paire $\mathscr{F}(u)$ est paire.
4. Ici $d = 1$. Vérifier que $XT_f = T_{Xf}$ où $X$ est l'application identité.

**Exercice 2. Existence de primitives dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.**

1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
   (a) Vérifier que l'application $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} : \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt$ est continue.
   (b) Montrer que si $\phi$ admet une primitive dans $\mathcal{D}$, $\int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt = 0$.
   (c) Montrer que la condition précédente est une condition suffisante.
2. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que l'application $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} : \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt$ est continue.
   (b) Vérifier que si $\phi$ admet une primitive dans $\mathcal{S}$, $\int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt = 0$.
   Supposons $\int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt = 0$. Soit $\psi : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt$.
   (c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\gamma_p > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $$(1 + |x|)^p |\psi(x)| \leq \gamma_p \mathcal{N}_{p+1}(\phi).$$
   (***Indication*** *: on pourra commencer par traiter le cas $x \leq 0$*)
   (d) En déduire que la condition est une condition suffisante.

**Exercice 3. Existence de primitives dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.** Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_R \theta(t)dt = 1$.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On pose $\tilde{\varphi} : x \mapsto \varphi(x) - \theta(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe $c_p > 0$ telle que $\mathcal{N}_p(\tilde{\varphi}) \leq c_p \mathcal{N}_{p+2}(\varphi)$.
2. Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ non nulle telle que $u' \equiv 0$ .
   (a) Déterminer $\ker u$.
   (b) Montrer que $u$ est de la forme $T_\lambda$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on note $\psi_\varphi$ une primitive de $\tilde{\varphi}$. Soit $u \in S'(\mathbb{R})$. Montrer que $v : \varphi \mapsto: -\langle u, \psi_\varphi \rangle$ est une primitive de $u$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
4. Que dire de la différence de deux primitives d'une même $u$ ?

**Exercice 4. Transformée de Fourier de distributions tempérées.**

1. Calculer la transformée de Fourier de $T_1$.
2. Montrer que $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ est une distribution tempérée impaire.
3. En déduire $\mathscr{F}(\mathrm{vp}\frac{1}{x})$.
4. En déduire $\mathscr{F}(T_H)$ et $\mathscr{F}(T_{\mathcal{A}})$ où $\mathcal{A}$ est la valeur absolue.

**Exercice 5.**

1. On considère l'équation $(E) : T'' - T' - 2T = \delta_0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
   (a) Déterminer les solutions de l'équation différentielle ordinaire $y'' - y' - 2y = 0$
   (b) Considérons la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f: \quad t \quad \mapsto \quad \begin{cases} \alpha e^{2x}, \ x < 0 \\ \alpha e^{-x}, \ x \geq 0. \end{cases}$$

   Justifier que $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
   (c) Donner une condition sur $\alpha$ pour que $T_f$ soit solution de $(E)$.
2. En déduire une solution de $(E') : T'' - T' - 2T = \delta_0'$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

**Exercice 6.** On veut résoudre l'équation $(E) : T'' - T = T_h$ où $h$ est la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h: \quad t \quad \mapsto \quad \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ e^{-x}, \ x \geq 0. \end{cases}$$

1. Déterminer les solutions des équations différentielles $y'' - y = 0$ et $y'' - y = e^{-x}$. (***Indication** : on pourra pour la seconde chercher une solution particulière de la forme $x \mapsto (ax+b)e^{-x}$*).
2. Construire des fonctions $f$ bornées sur $\mathbb{R}$, $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ telles que $f'' - f = h$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. En déduire que $(E)$ possède une unique solution qu'on déterminera.

**Exercice 7. Opérateur des ondes.** On veut déterminer la distribution $(\partial_t^2 - \partial_x^2)T_E$ où

$$\begin{array}{rccc} E: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{2}, \ |x| \leq t \\ 0, \ |x| > t. \end{cases} \end{array}$$

On note $\Delta := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq t\}$.

1. Tracer $\Delta$.
2. Justifier que $T_E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$
3. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\phi_a : s \mapsto \varphi(as, s)$. Calculer $\phi_a'$.
4. Conclure.