TD n°6 : INVERSION, TRANSFORMÉE DE FOURIER-PLANCHEREL.

Exercice 1 (Inversion de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$). Le but de cet exercice est de montrer que pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\|\check{f} - \wp^2(f)\|_2 = 0$ (formule d'inversion dans $L^2(\mathbb{R}^d)$). On rappelle que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$f * \varphi_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \varphi(\delta\xi) e^{2i\pi\langle x, \xi \rangle} d\xi.$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$h_n : \xi \mapsto \hat{f}(\xi) e^{-\pi \frac{\|\xi\|^2}{n^2}} = \hat{f}(\xi) \varphi\left(\frac{\xi}{n}\right).$$

1. Vérifier que pour tout n , $h_n \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.
2. Justifier que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n - \hat{f}\|_2 = 0$.
3. Vérifier que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{h}_n - \check{f}\|_1 = 0$.
4. En déduire la formule d'inversion dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on note $e_\lambda : x \mapsto e^{-\lambda|x|}$ et $g_\lambda : x \mapsto \frac{\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 x^2}$.

1. Calculer $\hat{e}_\lambda$ et $\hat{g}_\lambda$.
2. Résoudre l'équation $f * e_2 = e_3$ dans $L^1(\mathbb{R})$.
3. Résoudre l'équation $f * f = f$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soient f et g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

1. On veut montrer que $\mathcal{F}(\wp(f)\wp(g)) = \widehat{f * g}$.
 - (a) Supposons que f et g sont dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\mathcal{F}(\hat{f}\hat{g}) = \widehat{f * g}$.
 - (b) Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \|g_n - g\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Montrer que $\mathcal{F}(\hat{f}_n \hat{g}_n)$ converge uniformément vers $\mathcal{F}(\wp(f)\wp(g))$.

- (c) Conclure.
2. Montrer que $\int_{\mathbb{R}^d} f \bar{g} d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \wp(f) \overline{\wp(g)} d\lambda$.
3. On veut montrer que $\widehat{f g} = \wp(f) * \wp(g)$.
 - (a) Pour $\xi \in \mathbb{R}^d$, on pose $h_\xi : x \mapsto \overline{g(x)} e^{2i\pi\langle x, \xi \rangle}$. Vérifier que $\mathcal{F}(fg)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \wp(f)(x) \overline{\wp(h_\xi)(x)} dx$.
 - (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_{\xi,n} = \mathbf{1}_{B(0,n)} h_\xi$ et $g_n = \mathbf{1}_{B(0,n)} g$. Vérifier que $h_{\xi,n}$ et g_n sont dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ et que

$$\|h_{\xi,n} - h_\xi\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{et} \quad \|g_n - g\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\hat{h}_{\xi,n} = \widehat{\tau_\xi \hat{g}_n}$.
- (d) Conclure.