TD $n°5$: Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 1 (Transformée de Fourier et dérivation)**.** Un élément $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ est un *multi-indice*, sa *longueur* est $|\alpha| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_d|$. L'ensemble $\mathbb{N}^d$ des multi-indices est muni de l'ordre partiel $\beta \preceq \alpha$ si, pour tout k, $\beta_k \leq \alpha_k$. À un multi-indice α on associe l'opérateur de dérivation

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_d} x_d}\,;$$

on dit que $f \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ si $D^\beta f$ est définie et continue pour tout $\beta \preceq \alpha$.

Pour $m \in \mathbb{N}$, on dit que $f \in \mathscr{C}^m(\mathbb{R}^d)$ si $D^\alpha f$ est définie et continue pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq m$.

Enfin pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on note X^α l'application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$X^\alpha : (x_1, \dots, x_d) \mapsto \prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j}.$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On note $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$.

1. Supposons que $\int_{\mathbb{R}^d} |x_j f(x)| dx < \infty$. Montrer que $\hat{f}$ est dérivable par rapport à sa j-ème coordonnée et qu'on a
$$\partial_j \hat{f}(\xi) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}^d} x_j f(x) e^{-2i\pi\langle \xi, x\rangle} dx.$$
Vérifier que $\xi \mapsto \partial_j \hat{f}(\xi)$ est continue.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\int_{\mathbb{R}^d} (1 + ||x||)^k f(x) dx < \infty$. Montrer que $\hat{f} \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^d)$ et que
$$D^\alpha \hat{f}(\xi) = (-2i\pi)^{|\alpha|} \widehat{X^\alpha f}(\xi).$$
3. Supposons que f est continue et admet une dérivée partielle $\partial_j f$ telle que $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
   (a) Montrer que, si f est à support compact, on a
   $$(\star) \quad \widehat{\partial_j f}(\xi) = 2i\pi \xi_j \hat{f}(\xi).$$
   (b) Soit $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi(0) = 1$. On pose pour $n \in N$, $f_n(x) = f(x)\varphi(x/n)$. Montrer que
   $$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_1 = 0 = \lim_{n\to\infty} ||\partial_j f_n = -\partial_j f||_1.$$
   (c) Déduire de ce qui précède que $(\star)$ est encore vérifiée quand f n'est plus à support compact.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $f \in \mathscr{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ et que, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ tel que $\beta \preceq \alpha$, $D^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que
$$\widehat{D^\beta} f(\xi) = (2i\pi)^{|\beta|} X^\beta(\xi) \hat{f}(\xi).$$

Exercice 2 (Formule sommatoire de Poisson)**.** Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ telle que

— il existe $M > 0$ et $\alpha > 1$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M(1 + |x|)^{-\alpha}$,

— $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$.

Soit $F : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + n)$.

1. Vérifier que F est bien définie, continue et 1-périodique.
2. Montrer que $\hat{F}(n) = \hat{f}(n)$ où $\hat{F}(n) := \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi nt} dt$ est le coefficient de Fourier d'ordre n de F.
3. En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$.