TD n°4: THÉORÈME DE FEJÉR, IDENTITÉ DE PARSEVAL

- Exercice 1.** 1. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que f n'a qu'un nombre fini de coefficients de Fourier non nuls. Montrer que f est presque partout égale à un polynôme trigonométrique qu'on déterminera.
2. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) \neq 0$. Déterminer les vecteurs propres de l'application $g \mapsto g * f$.

Exercice 2 (Inégalité de Wirtinger). Soit $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que $\int_{\mathbb{T}} f d\mu = 0$. Montrer que $\|f\|_2 \leq \|f'\|_2$ avec égalité si et seulement si il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $f(t) = \alpha e^{it} + \beta e^{-it}$.

Exercice 3 (Inégalité isopérimétrique). Soit $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction C^1 injective telle que

- pour tout $t \in \mathbb{T}$, $|\gamma'(t)| = 1$,
- $\int_0^{2\pi} \gamma(t) dt = 0$.

On note Γ l'image de γ . On pose

$$\mathcal{A}(\Gamma) := \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \det(\gamma(t), \gamma'(t)) dt.$$

1. Vérifier que $\det(\gamma(t), \gamma'(t)) = \text{Im}(\overline{\gamma(t)}\gamma'(t))$.
2. Montrer que $\mathcal{A}(\Gamma) \leq \pi$.
3. Décrire les cas d'égalité.

Exercice 4. On dit qu'une fonction $\Theta : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ *préserve* μ si pour tout borélien A , $\mu(\Theta^{-1}(A)) = \mu(A)$; une telle fonction Θ est dite *ergodique* si pour tout $A \subset \mathbb{T}$ tel que $\Theta^{-1}(A) = A$, $\mu(A) \in \{0, 1\}$.

1. Soit $\Theta : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ préservant μ . Montrer que si les seules fonctions boréliennes $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $f \circ \Theta = f$ sont les fonctions constantes presque partout, alors Θ est ergodique.
2. On suppose Θ ergodique et on cherche à montrer la réciproque.
 - (a) Soit $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ borélienne telle que $f \circ \Theta = f$ et soit B un borélien de $\mathbb{C}$. Montrer que $f^{-1}(B)$ est de mesure pleine ou nulle.
 - (b) Soit $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ \Theta = f$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique $k(n) \in \mathbb{Z}$ telle que $f^{-1}([\frac{k(n)}{n}, \frac{k(n)+1}{n}[[$) soit de mesure pleine. On note $K_n = f^{-1}([\frac{k(n)}{n}, \frac{k(n)+1}{n}[[$). Vérifier que $K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$ est un borélien de mesure pleine.
 - (c) On pose $I_n = [\frac{k(n)}{n}, \frac{k(n)+1}{n}[$). Étudier $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$ et conclure.
3. Pour $\alpha \in \mathbb{T}$, on définit la rotation d'angle α par $\rho_\alpha(t) = t + \alpha$. Montrer que ρ_α est ergodique si et seulement si $\frac{\alpha}{2\pi}$ est irrationnel.