TD $n°3$: Séries de Fourier et Noyau de Dirichlet

On note D_N le noyau de Dirichlet d'ordre N et pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$, on note $S_N(f) = D_N * f$.

Exercice 1. À $y \in \mathbb{R}$, on associe une fonction f_y 2π-périodique définie par $f_y(x) = e^{xy}$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

1. Vérifier que $S_N(f)$ converge simplement en tout point x de $\mathbb{T}$ et expliciter la limite.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f et déterminer, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N(f)(\pi)$.
3. En déduire $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2+y^2}$ puis $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2. Soit P un polynôme pair de degré 4 tel que

$$P'(\pi) = 0, \quad P'''(\pi) = 1, \quad \int_0^\pi P(t)dt = 0,$$

et soit f une fonction 2π-périodique qui coïncide avec P sur $[-\pi, \pi[$.

1. Montrer que P est unique et déterminer ses coefficients.
2. Vérifier que $S_N(f)$ converge simplement vers f.
3. En déduire les sommes $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^4}$.

Exercice 3 (Phénomène de Gibbs).

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable.
2. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on note
$$I(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$
3. Montrer que $\lim_{x\mapsto+\infty} I(x)$ existe. On note I cette limite.

On définit les suites

$$J_n := \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt \quad \text{et} \quad \mathrm{K_n} := \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{\sin((2n+1)t)}}{\mathrm{t}} \mathrm{dt}.$$

   (a) Montrer que J_n est constante et que $\lim_{n\to\infty} K_n = I$.
   (b) En déduire la valeur de I.

4. Montrer que $\max_{0\leq x<\infty} I(x) = I(\pi) > I$.

Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \pi - x$ sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

5. Vérifier que f est paire et satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet.
6. Déterminer les coefficients de Fourier de f et montrer que $S_N f(x) = -x + \int_0^x D_N(t)dt$.
7. En déduire que pour toute suite $(x_N)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[-\pi, \pi]$,
$$\limsup_{N\to\infty} S_N f(x_N) + x_N \leq \pi.$$
8. On pose $\alpha = 2\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$. Montrer que tout $a \in [-\alpha, \alpha]$ est limite d'une suite de la forme $S_N f(x_N)$ où $(x_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de $\mathbb{T}$ qui tend vers 0. ***Indication*** *: on pourra remarquer que l'application* $[-\pi, \pi] \to [-\alpha, \alpha] : x \mapsto \int_0^x \sin t/tdt$ *est un homéomorphisme.*

Exercice 4. Le but de cet exercice est de déterminer un équivalent quand $N \to \infty$ de $||D_N||_1$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ est continue. En déduire l'existence d'une suite bornée $(u_N)_{N\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que
$$||D_N||_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\frac{t}{2}} \right| dt + u_N,$$
2. Montrer que
$$\int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\frac{t}{2}} \right| dt = 2\sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} + v_N,$$
où $(v_N)_{N\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est telle que $\lim_{N\to\infty} v_N = 0$.
3. Montrer que
$$\sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \right) + \sum_{k=1}^{N-1} w_k,$$
où $(w_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est telle que $|w_k| \leq \frac{1}{k^2\pi}$.
4. Déduire des questions précédentes l'équivalent suivant :
$$||D_N||_1 \sim \frac{4}{\pi^2}\log N.$$
On rappelle que si $\gamma_N = (\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N)$, la suite $(\gamma_N)_N$ converge vers la *constante d'Euler* γ.