TD $n°2$: Exemples et opérations élémentaires sur les distributions

Exercice 1. Dérivation.

1. On note $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de Heaviside définie par $H(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $H(x) = 0$ si $x < 0$. Vérifier que $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et déterminer la dérivée $(T_H)'$.
2. On note $\mathcal{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $x \mapsto |x|$. Vérifier que $\mathcal{A} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et déterminer $(T_{\mathcal{A}})'$.

Exercice 2. Valeur principale. On définit l'application $\mathrm{vp}\frac{1}{x} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ par

$$\mathrm{vp}\frac{1}{x}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx.$$

On veut montrer que $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ est une distribution.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Justifier qu'il existe une application $\psi \in C^0(\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

et $\|\psi\|_\infty \leq \|\varphi'\|_\infty$.

2. Démontrer que $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ (appelée *valeur principale* de $1/x$).

Exercice 3. Partie finie. On définit l'application $\mathrm{Pf}\frac{1}{x^2} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ par

$$\mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right)$$

On veut montrer que $\mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}$ est une distribution.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Justifier qu'il existe une application $\psi \in C^0(\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\psi(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

et $\|\psi\|_\infty \leq \|\varphi''\|_\infty$.

2. Exprimer $\mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}(\varphi)$ en fonction de ψ et démontrer que $\mathrm{Pf}\frac{1}{x^2}$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ (appelée *partie finie* de $1/x^2$).

Exercice 4. Multiplication par une fonction C^∞. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On note 1 la fonction constante égale à 1 et $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'identité.

1. Montrer que l'application $\chi u : \psi \mapsto \langle u, \chi\psi \rangle$ est une distribution.
2. Montrer que $X\,\mathrm{vp}\frac{1}{x} = T_1$.
3. Montrer que $X^2\,\mathrm{Pf}\frac{1}{x^2} = T_1$.

Exercice 5.

1. Déterminer $(\mathrm{vp}\frac{1}{x})'$.
2. On note $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{Log}\,|x| & \text{pour } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$

   Vérifier que $L \in L^1_{loc}$ et déterminer T_L'.

Exercice 6. Support.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, on définit le support de u comme l'ensemble des points x de $\mathbb{R}^d$ tels que pour tout voisinage ouvert O de x, il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{Supp}\varphi \subset O$ qui vérifie

$$u(\varphi) \neq 0.$$

1. Déterminer le support de la distribution associée à l'application caractéristique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le support de la distribution associée à l'application caractéristique de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $u : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,x)\,dx.$$

3. Démontrer que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
4. Déterminer le support de u.

Exercice 7. Formule des sauts. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. On suppose que h et h' (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ ont des limites à droite et à gauche en a. Démontrer que

$$(T_h)' = T_{h'} + \big(h(a^+) - h(a^-)\big)\delta_a$$

où $h(a^+)$ et $h(a^-)$ sont les limites à droite et gauche et de h en a.

Exercice 8. Mesure borélienne. *Où il est utile de se rappeler son cours de théorie de la mesure...*
Soit $a \in \mathbb{R}^d$. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \mu_a : & \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) & \to & \{0,1\} \\ & B & \mapsto & \begin{cases} 1, \text{ si } \ a \in B \\ 0, \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

où $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$.

1. Vérifier que μ_a est une mesure borélienne.
2. Vérifier que l'application
$$\begin{array}{rccc} u : & \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) & \to & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_a \end{array}$$
est une distribution.
3. Expliciter u.