

TD n°1 : UN PEU DE THÉORIE DE L'INTÉGRATION

Exercice 1. Le but de cet exercice est de démontrer le **Lemme de Riemann-Lebesgue** : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$.

1. Montrer le résultat lorsque f est la fonction caractéristique d'un intervalle borné.
2. Soit $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une famille finie $a_0 < a_1 < \dots < a_m$ de réels tels que

$$\text{supp } g \subset [a_0, a_m] \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in [a_i, a_{i+1}]^2, \quad |g(x) - g(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2(a_m - a_0)}.$$

3. Conclure.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable. Pour $a \geq 0$, on pose $E_a := \{x \mid f(x) > a\}$.

1. Vérifier que $\text{supess } f = \sup\{a \geq 0 \mid \lambda(E_a) > 0\}$.
2. Soit $a < \text{supess } f$. Justifier l'existence d'un entier n tel que $\lambda(\{E_a \cap [-n, n]^d\}) > 0$.
3. En déduire que

$$\text{supess } f = \sup_{\substack{g \geq 0 \\ \|g\|_1 \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^d} f g d\lambda.$$

puis que pour $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ à valeurs complexes

$$\|f\|_\infty = \sup_{\|g\|_1 \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f g d\lambda \right|.$$

Exercice 3. Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $f \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Montrer que l'application $\Phi_f : L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C} : g \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f g d\lambda$ est une forme linéaire continue de norme $\|\Phi_f\| = \|f\|_q$.

Exercice 4. Soit f mesurable. En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, montrer que

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda(\{|f| > t\}) dt.$$

Exercice 5. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact. Montrer que si $1 \leq p < q \leq \infty$, $L^q(K) \subset L^p(K)$.

Exercice 6. On rappelle qu'un espace est dit *de Baire* si toute union dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide. On rappelle un **lemme de Baire** : *Tout espace complet est un espace de Baire.*

1. Soit E un espace de Banach admettant une base *algébrique* dénombrable. Montrer que E est de dimension finie.
2. En déduire que pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{T})$ n'admet pas de base algébrique dénombrable.

Exercice 7. *À faire à la maison...* On cherche à démontrer le théorème de Lusin. On rappelle les résultats suivants :

Régularité de la mesure de Lebesgue : Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ mesurable tel que $\lambda(A) < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \subset \mathbb{R}^d$ compact et $O \subset \mathbb{R}$ ouvert tels que

$$K \subset A \subset O, \quad \text{et} \quad \lambda(O \setminus K) \leq \varepsilon.$$

Lemme d'Urysohn : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $K \subset U$ un compact. Il existe une fonction continue $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ telle que $f \equiv 1$ sur K et $f \equiv 0$ sur le complémentaire de U .

Existence de voisinage compact d'un compact : Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et U un ouvert contenant K . Il existe $V \subset U$ ouvert contenant K tel que $\bar{V} \subset U$ et $\bar{V}$ compact.

Soit Ω un borélien de $\mathbb{R}^d$ et $h : \Omega \rightarrow [0, 1]$ mesurable. Le but de cet exercice est de montrer l'existence d'une suite de parties mesurables $(A_n)_{n \geq 1}$ tels que $h = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{A_n}$. On pose $g_0 \equiv 0$, $A_1 := \{x \mid f(x) \geq \frac{1}{2}\}$. On considère les suites g_n et A_n définies par

$$\begin{cases} A_n = \{x \mid h(x) \geq g_{n-1}(x) + \frac{1}{2^n}\} \\ g_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \mathbf{1}_{A_k}. \end{cases}$$

1. Tracer g_1, g_2 et g_3 pour $h : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, $x \mapsto \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 1-x, & x \geq 0 \end{cases}$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \Omega$, $g_n(x) \leq f(x) \leq g_n(x) + \frac{1}{2^n}$ et conclure.

Soit maintenant $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable telle que $\lambda(\{x \mid f(x) \neq 0\}) < \infty$. On note $A := \{x \mid f(x) \neq 0\}$.

3. On suppose A compact et f à valeurs dans $[0, 1]$.

- (a) On fixe $\varepsilon > 0$. On définit les ensembles A_n comme dans l'exercice 1. Montrer qu'il existe une suite $(K_n)_{n \geq 1}$ de compacts et une suite $(V_n)_{n \geq 1}$ d'ouverts relativement compacts tels que $K_n \subset A_n \subset V_n$ et $\lambda(V_n \setminus K_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$.

- (b) En déduire pour tout $\varepsilon > 0$ l'existence de $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ telle que $\lambda(\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}) \leq \varepsilon$.

4. Étendre le résultat pour f à valeurs dans $[0, 1]$ sans supposer A compact.

5. Étendre le résultat pour f à valeurs positives, puis pour f à valeurs complexes.

6. En considérant l'application $\zeta : x \mapsto \begin{cases} x, & \text{si } x \leq \|f\|_\infty \\ \frac{x\|f\|_\infty}{\|x\|}, & \text{si } x \geq \|f\|_\infty. \end{cases}$ Montrer qu'on peut de plus choisir g telle que $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

7. En déduire la version plus faible suivante du théorème de Lusin :

Soit Ω un borélien de $\mathbb{R}^d$ et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable telle que $\lambda(\{x \mid f(x) \neq 0\}) < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \subset \Omega$ compact tel que $f|_K$ est continue et $\lambda(\Omega \setminus K) \leq \varepsilon$.

On pourra considérer séparément le cas Ω compact du cas Ω non compact.