 TD $n^{\circ}4$: SURFACES DE $\mathbb{R}^3$ ET LEURS PLANS TANGENTS

Exercice 1. Montrer qu'un plan affine est une surface de classe C^∞ et déterminer son espace tangent en tout point.

Exercice 2. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^k .

1. Montrer que le graphe Γ_ϕ de ϕ est une surface de classe C^k .
2. Montrer que l'espace tangent en $(x, y, \phi(x, y))$ de Γ_ϕ est le graphe de l'application $d_{(x,y)}\phi$.
3. Vérifier que les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont des surfaces de classe C^∞ et décrire leur allure :

$$(a) \mathcal{P}_1 := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z = 0\} \qquad (b) \mathcal{P}_2 := \{(x, y, z) \mid x^2 - y^2 - z = 0\}.$$

En déduire l'espace tangent en tout point de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Exercice 3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^k telle que pour tout $(x, y, z) \in U$, $d_{(x,y,z)}f$ est surjective.

1. Soit $\alpha \in f(U)$. Montrer que $f^{-1}\{\alpha\}$ est une surface de classe C^k . (*Indication* : on pourra utiliser le théorème des fonctions implicites et l'exercice 2).
2. Montrer que l'espace tangent à $f^{-1}\{\alpha\}$ en un point (x_0, y_0, z_0) est $\ker d_{(x_0,y_0,z_0)}f$.
3. Vérifier que les ensembles suivants sont des surfaces de classe C^∞ :

$$(a) \mathcal{S} := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$(b) \mathcal{H} := \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 1 \text{ et } z > 0\} \text{ Les tracer et déterminer leur espace tangent en tout point.}$$

4. Donner pour $\mathcal{S}$ et $\mathcal{H}$ des paramétrisations locales. En déduire pour chacune une base de leur espace tangent en un point quelconque.

Exercice 4. Soit $0 < r < R$ deux réels positifs fixés. On introduit la fonction g :

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, \theta) \mapsto ((R + r \cos \theta) \cos \varphi, (R + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta).$$

On appelle *tore de révolution* l'image $\mathcal{T}$ de g .

1. Vérifier que g est une application C^∞ dont la différentielle est injective en tout point.
2. Tracer $\mathcal{T}$.
3. Montrer que $\mathcal{T}$ est ne surface de classe C^∞ .
4. Déterminer l'espace tangent à $\mathcal{T}$ en un point quelconque.