

TD n°3 : SOUS-VARIÉTÉS DE DIMENSION 1

Exercice 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^k , $k \geq 1$.

1. Montrer que le graphe de f est une sous-variété de dimension 1 et de classe C^k et déterminer son espace tangent en tout point.
2. En déduire que les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont des sous-variétés de dimension 1 et de classe C^∞ qu'on tracera :

(a) $\mathcal{P} := \{(x, y) \mid x^2 - y = 0\}$

(b) $\mathcal{H} := \{(x, y) \mid xy = 1 \text{ et } y > 0\}$

3. Pour chacune des sous-variétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$ déterminer son espace tangent en tout point.
4. En déduire des expressions des longueurs des portions de courbes $\mathcal{P} \cap \{(x, y) \mid x \in [-1, 1]\}$ et $\mathcal{H} \cap \{(x, y) \mid x \in [-1, 1]\}$.

Exercice 2. Soit p un entier naturel **impair** et soit $q > p$ un autre entier naturel. Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'arc paramétré défini par $\gamma : t \mapsto (t^p, t^q)$. On note $\mathcal{C}$ la courbe image de γ .

1. Rappeler l'allure de $\mathcal{C}$ en fonction de la parité de q .
2. Montrer que la fonction $x \mapsto x^p$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$. On note $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$ son inverse.
3. Vérifier que $\mathcal{C}$ est le graphe de la fonction $x \mapsto x^{\frac{q}{p}}$.
4. Soit $\alpha > 1$. On considère les fonctions

$$f(x) = \begin{cases} e^{\alpha \ln x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -e^{\alpha \ln(-x)} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} e^{\alpha \ln x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{\alpha \ln(-x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que f et g sont de classe C^1 .

5. En déduire que $\mathcal{C}$ est une sous-variété de classe C^1 .
6. Déterminer l'espace tangent de $\mathcal{C}$ en tout point et en déduire la longueur de la portion de courbe $\gamma([-1, 1])$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$. On note $\mathcal{C}_a := f^{-1}(\{a\})$.

1. Dessiner $\mathcal{C}_a$ pour a variant dans $\mathbb{R}$.
2. Calculer la différentielle de f en un point (x, y) . Quand $D_{(x,y)}f$ est-elle une fonction surjective ? À quelles valeurs de a cela correspond-il ?

On suppose maintenant $a \neq 0$.

3. Montrer que chacune des composantes connexes de $\mathcal{C}_a$ est une sous-variété de dimension 1 et de classe C^∞ .
4. Montrer que l'espace tangent à $\mathcal{C}_a$ au point (x, y) est égal à $\text{Ker } D_{(x,y)}f$.