

TD n°2 : LONGUEUR ET ABSCISSE URVILIGNE

Exercice 1. Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un arc de classe C^1 . On appelle *subdivision* de $[a, b]$ une famille de points $\sigma := \{t_0, \dots, t_n\}$ telle que

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b.$$

À une subdivisions σ de $[a, b]$ associe le réel $\ell(\sigma)$ donné par

$$\ell(\sigma) := \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})\|.$$

On pose $\ell(\gamma) := \sup\{\ell(\sigma) \mid \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}$.

1. Montrer que $\ell(\gamma)$ est fini.
2. Montrer que si $\tilde{\sigma}$ est une subdivision obtenue en ajoutant des points à σ , $\ell(\tilde{\sigma}) \leq \ell(\sigma)$.
3. Soit A et B deux points distincts de $\mathbb{R}^2$. Calculer $\ell(\gamma)$ pour $[a, b] = [0, 1]$ et $\gamma : t \mapsto (1-t)A + tB$.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous t, s dans $[a, b]$ tels que $|t - s| \leq \eta$,

$$\|\gamma(t) - \gamma(s) + (s - t)\gamma'(t)\| \leq \varepsilon|t - s|.$$

Indication : on peut étudier la fonction $\alpha_t : s \mapsto \gamma(s) - s\gamma'(t)$

5. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si σ est une subdivision telle que pour tout i , $|t_i - t_{i+1}| \leq \eta$, alors

$$\left| \ell(\sigma) - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| \leq 2\varepsilon(b - a).$$

6. Dédurre des questions précédentes que $\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

On appelle longueur de la courbe Γ le nombre

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Exercice 2. Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un arc de classe C^1 , tel que pour tout t , $\gamma'(t) \neq 0$. Soit $\Gamma := \gamma([a, b])$ la courbe image.

1. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $\phi : I \rightarrow J$ un difféomorphisme. Vérifier que ϕ' ne s'annule pas.
2. Soit I et J deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$ et soit $\phi : I \rightarrow J$ une bijection de classe C^1 et de dérivée jamais nulle
 - (a) Montrer que ϕ^{-1} est Lipschitzienne.
 - (b) Montrer ϕ est un difféomorphisme. **Indication :** pour $y = \phi(x)$, on pourra commencer par montrer l'équivalence suivante pour k et h assez petits :

$$k = \phi(x + h) - \phi(x) \iff h = \phi^{-1}(y + k) - \phi^{-1}(y).$$

3. Montrer que $\ell(\Gamma)$ ne dépend pas du paramétrage choisi.
4. Montrer que l'application $\sigma : t \mapsto \int_a^t \|\gamma'(s)\| ds$ est un C^1 -difféomorphisme de $[a, b]$ sur un intervalle J qu'on précisera.
5. Vérifier que pour tout $t \in J$, $\|(\gamma \circ \sigma^{-1})'(t)\| = 1$. On dit que la courbe Γ est *paramétrée par l'abscisse curviligne*.