Chapitre 2

Séries de Fourier

On considère ici des fonctions complexes définies sur le cercle $\mathbb{T}$. Une telle fonction sera identifiée sans distinction de notation avec son relevé 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
Rappelons que si $f \in L^1(\mathbb{T})$,

$$\int_{\mathbb{T}} f d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt \quad \text{et} \quad ||f||_p = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\Big)^{1/p}.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto e^{int}$.
On note $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ l'espace des suites de nombres complexes indexées par $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}}$ le sous-espace des suites qui tendent vers 0 en $\pm\infty$.

On peut définir la convolée de deux éléments f, g de $L^1(\mathbb{T})$ comme dans pour des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^d$ en posant

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt$$

Cette définition est en réalité a priori valable seulement presque partout comme dans le cas $\mathbb{R}^d$.
On vérifie à nouveau qu'alors $f * g$ est intégrable et que $||f * g||_1 \leq ||f||_1||g||_1$.

2.1 Coefficients et série de Fourier

2.1.1 Transformée de Fourier discrète

Définition 2.1

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Pour $n \in \mathbb{Z}$ le coefficient de Fourier d'ordre n de f est

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \int_{\mathbb{T}} f \cdot e_n d\mu$$

La suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est la transformée de Fourier discrète de f.

Remarque 2.1.1. D'après le lemme de Riemman-Lebesgue $\lim_{|n|\to\infty} c_n(f) = 0$.

Exemple 2.1.1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty$. Soit $f : t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$. La série converge normalement sur $\mathbb{T}$ donc f est bien définie et continue. Un simple calcul permet de montrer que pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = a_n$.

Les propriétés suivantes ne sont que de simples calculs.

Propriété 2.1.1

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $a \in \mathbb{T}$

1. $c_n(\tau_a f) = e^{-ina} c_n(f)$.
2. *Si f est de classe C^1,* $c_n(f') = inc_n(f)$.
3. *Si g est une dérivée de f au sens des distributions, c'est-à-dire si $T_g = T_f'$ alors* $c_n(g) = inc_n(f)$.

Définition 2.2

La série de Fourier $S(f)$ de f est la série de fonctions sur $\mathbb{Z}$ de terme général $c_n(f)e_n$; pour $N \in \mathbb{N}$, on note

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$$

la somme partielle symétrique d'ordre N.

Les questions traitées par la théorie de Fourier sont les suivante :

— La série $S(f)$ converge-t- elle ?

— Si convergence, converge-t-elle vers f ?

Remarque 2.1.2. On prendra garde au fait que la convergence de la suite $S_N(f)$ n'est pas équivalente à la convergence de $S(f)$, on a seulement l'implication

$$S(f) \text{ converge} \Longrightarrow \text{la suite } (S_N(f))_{N\in\mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Définition 2.3

L'application

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{F}_d : & L^1(\mathbb{T}) & \to & \mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}} \\ & f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

est la transformée de Fourier discrète.

Si $\cdot$ désigne le produit terme à terme dans l'espace des suites, $(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre dont le sous-espace $\mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}}$ est une sous-algèbre.

Proposition 2.1.1

$\mathscr{F}_d$ est un morphisme continu d'algèbres de $(L^1(\mathbb{T})|| \cdot ||_1)$ dans $(\mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}}, || \cdot ||_\infty)$.

Preuve. La linéarité vient de celle de l'intégrale. La continuité vient de la définition des coefficients de Fourier : pour tout n, $|c_n(f)| \leq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|dt = ||f||_1$ Il reste à vérifier que pour toutes f, g et tout n, $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.

$$\begin{aligned} c_n(f*g) &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)g(t-u)du\Big)e^{int}dt \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inu}f(u)\Big(\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t-u)e^{in(t-u}dt\Big)du = c_n(f)c_n(g) \end{aligned}$$

grâce au théorème de Fubini. □

Proposition 2.1.2

L'algèbre $(L^1(\mathbb{T}), +, *, \times)$ n'est pas unitaire.

Preuve. Raisonnons par contradiction et supposons qu'elle ait une unité g. Alors pour tout f intégrable et tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f)c_n(g) = c_n(f)$. Considérons $f : t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+1}e^{int}$. On a déjà vu qu'alors $c_n(f) = \frac{1}{n^2+1} \neq 0$. On en déduit que pour tout n, $c_n(g) = 1$, ce qui est exclu. □

2.1.2 Coefficients de Fourier « réels ».

Définition 2.4

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n(f) = \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos ntdt \qquad \text{et} \qquad b_n(f) = \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin ntdt.$$

Remarque 2.1.3. Si f est à **valeurs réelles**, les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels et pour $n \geq 1$

$$a_n(f) = 2\,\mathrm{Re}\,u = 2\,\mathrm{Re}\,c_n(f) \qquad \text{et} \qquad b_n(f) = -2\mathrm{Im}\,u = 2\mathrm{Im}\,c_n(f))$$

ce qui justifie probablement l'appellation « coefficients de Fourier réels », au demeurant pas très judicieuse.

Proposition 2.1.3

Pour $N \geq 0$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$S_N f(t) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos nt + b_n(f)\sin nt.$$

Preuve. Par définition $a_0(f) = 2c_0(f)$. Pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\big(e^{-in(x-t)} + e^{in(x-t)}\big)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-t)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\cos nt - \sin nx\sin ntdx \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[\Big(\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx\Big)\cos nt + \Big(\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx\Big)\sin nt\Big] \\
&= a_n(f)\cos nt + b_n(f)\sin nt
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

Propriété 2.1.2

Si f est paire, pour tout n, $b_n(f) = 0$ et si f est impaire pour tout n, $a_n(f) = 0$.

Preuve. Dans chaque cas, on intègre une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine. □

2.1.3 Estimées sur la « décroissance » des $c_n(f)$.

On étudie ici la vitesse de convergence vers 0 des coefficients de Fourier en fonction de la régularité de la fonction.

Proposition 2.1.4

Si f est C^k, $c_n(f) = o(\frac{1}{|n|^k})$.

Preuve. $c_n(f) = \frac{1}{(in)^k}\widehat{f^{(k)}}(n)$. □

Remarque 2.1.4. 1) Si f est C^∞, $c_n(f) = o(\frac{1}{|n|^k})$ pour tout k.
2) Si f est C^k avec $k \leq 2$, la série de Fourier $S(f)$ est normalement convergente (mais à ce stade, on ne sait encore rien de sa limite).

Proposition 2.1.5

Si f est C^k avec $k \geq 3$, alors $S(f)$ est C^{k-2}.

Preuve. Soit $k \geq 3$. D'après ce qui précède, si f est C^k, $c_n(f) = o(\frac{1}{n^k})$ et $S(f)$ est normalement convergente. Notons $g_n : t \mapsto c_n(f)e^{int}$. Pour $1 \leq j \leq k-2$, $||g_n^{(j)}|| = o(\frac{1}{n^{k-j}}) = o(\frac{1}{n^2})$, donc les séries de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n^{(j)}$ sont normalement convergentes et $S(f)$ est de classe C^{k-2}. □

Lemme 2.1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et analytique. Il existe $\delta > 0$ tel que f se prolonge en une fonction holomorphe F sur la bande $\mathcal{B}_\delta := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\mathrm{Im}\, z| < \delta\}$ qui est 2π-périodique.

Preuve. Pour tout $x \in [0, 2\pi]$, il existe $R_x > 0$ tel que f est développable en série entière sur $B(x, R_x)$. Notons B_∞ une boule pour $|| \cdot ||_\infty$ et prenons pour tout x, $r_x > 0$ tel que $B_\infty(x, r_x) \subset B(x, R_x)$. Par compacité, il existe une famille fini de carrés $(B_j := B_\infty(x_j, r_j))_{1\leq j\leq m}$ qui recouvrent $[0, 2\pi]$. On peut de plus la choisir de sorte que $B_j \cap B_{j+1}$ d'intérieur non vide. Pour $1 \leq j \leq m$, on note $S_j : z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(j)(z - x_j)^n$ la série entière définie par f. Soit $\delta = \min\{r_j \,|\, 1 \leq j \leq m\}$ et soit F définie sur $]-\delta, 2\pi+\delta[\times]-\delta, \delta[$ par $F(z) = S_j(z)$ si $z \in B_j \cap \mathcal{B}_\delta$. Cette fonction est bien définie. En effet, si $\bar{B}_j \cap \bar{B}_k \neq \emptyset$, pour $j \leq \ell \leq k-1$, S_ℓ et $S_{\ell+1}$ coïncident sur $B_\ell \cap B_{\ell+1} \cap \mathbb{R}$ (elles y sont égales à f) donc coïncident sur l'ouvert connexe $B_\ell \cap B_{\ell+1}$ par le principe des zéros isolés. Par construction F est holomorphe et par le principe des zéros isolés elle est 2π-périodique. □

Proposition 2.1.6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ analytique et 2π-périodique. Soit $\delta > 0$ tel que f se prolonge en un fonction analytique sur $\mathcal{B}_\delta$. Pour tout $\alpha \in]0, \delta[$, il existe $M_\alpha > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|c_n(f)| \leq M_\alpha e^{-n\alpha}$.

Preuve. Notons F le prolongement holomorphe de f à $\mathcal{B}_\delta$. Par 2π-périodicité, F atteint son maximum noté M_α sur $\overline{\mathcal{B}_\alpha}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, posons $g_n : z \mapsto F(z)e^{-inz}$ et notons $R = [0, 2\pi]\times[-i\alpha, 0]$.

Puisque g_n est holomorphe

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial R} g_n(z)dz \\
&= \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt + \int_0^{-\alpha} F(2\pi + is)e^{-ins}ds + \int_{2\pi}^0 F(t - i\alpha)e^{-in(t-\alpha)}dt + \int_{-\alpha}^0 F(is)e^{-ins}ds \\
&= \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt + \int_{2\pi}^0 F(t - i\alpha)e^{-in(t-i\alpha)}dt \\
&= 2\pi c_n(f) - e^{-n\alpha}\int_0^{2\pi} F(t - i\alpha)e^{-int}dt.
\end{aligned}$$

D'où $|c_n(f)| \leq M_\alpha e^{-n\alpha}$. □

Proposition 2.1.7

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, $|c_n(f)| \leq \frac{1}{2}\mu_f(\frac{\pi}{n})$.

Preuve. En effectuant d'abord un changement de variable, puis en utilisant la 2π-périodicité de f, on peut écrire :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{2\pi+\frac{\pi}{n}} f(t - \tfrac{\pi}{n})e^{-in(t-\frac{\pi}{n})}dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t - \tfrac{\pi}{n})e^{-int}dt.$$

D'où

$$c_n(f) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t) - f(t - \tfrac{\pi}{n}))e^{-int}dt$$

ce qui donne le résultat. □

2.2 Résultats de convergence

2.2.1 Convergence ponctuelle et théorème de Dirichlet

Définition 2.5

Le noyau de Dirichlet d'ordre $N \geq 0$ est $D_N := \sum_{-N}^{N} e_n$.

Proposition 2.2.1

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D_N * f(x) = S_N f(x)$. En particulier, $D_N * f$ est définie pour tout x et est C^∞.

Preuve. Pour $x \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}
S_N f(x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N}\Big(\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\Big)e^{inx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(f(t)\sum_{-N}^{N} e^{in(x-t)}\Big)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_N(x-t)dt.
\end{aligned}$$

Ainsi $f * D_N(x)$ est bien défini et égal à $S_N f(x)$. □

Propriété 2.2.1

Pour $N \geq 1$,

1. *D_N est paire.*
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} D_N d\mu = 1$.
3. *Pour $x \in \mathbb{R}$, $D_N(x) = \dfrac{\sin(N+1/2)x}{\sin x/2}$.*

Preuve. 2. $D_N(t) = 1 + \sum_{n=1}^{N} 2\cos nt$ et pour $n > 0$, $\int_0^{2\pi} \cos ntdt = 0$
3. C'est un calcul classique à avoir vu au moins une fois :

$$\begin{aligned}
D_N(x) &= e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} \\
&= e^{-iNx} \frac{1 - e^{i(2N+1)x}}{1 - e^{ix}} \\
&= e^{-iNx} \frac{e^{i(N+1/2)}x}{e^{ix/2}} \frac{e^{-i(N+1/2)x} - e^{+i(N+1/2)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} \\
&= \frac{-2i\sin(N+1/2)x}{-2i\sin(x/2)}.
\end{aligned}$$

... et à savoir refaire ! □

Proposition 2.2.2

Si f est dérivable en x, $S(f)(x)$ converge vers $f(x)$.

Preuve. On va montrer que la suite $S_N f(x)$ converge vers $f(x)$. Écrivons

$$\begin{aligned}
S_N f(x) - f(x) = D_N * f(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N f(t)(f(x-t) - f(x))dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(N+1/2)t}{\sin t/2}(f(x-t) - f(t))dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((N+1/2)t) \underbrace{\frac{t/2}{\sin t/2} \frac{f(x-t) - f(x)}{t}}_{h_x(t)} dt.
\end{aligned}$$

Or $t \mapsto \frac{t/2}{\sin t/2}$ est continue sur$[-\pi, \pi]$ et puisque f est dérivable h_x est continue en 0. Le lemme de Riemann-Lebesgue permet alors de conclure. □

Remarque 2.2.1. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, la série de Fourier $S(f)$ converge simplement vers f. Si f est de classe C^2, on sait alors que la convergence est normale.

Théorème de Dirichlet

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $x \in \mathbb{T}$ tels que

1. *f a des limites à gauche et à droite en x notées $f(x^-)$ et $f(x^+)$.*
2. *Les intégrales suivantes sont finies*

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(x-t)-f(x^-)}{t}dt \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \frac{f(x+t)-f(x^+)}{t}dt$$

Alors $S(f)(x)$ converge vers $f(x)$.

Preuve. Remarquons que, par parité de D_N et changement de variable

$$\int_{-\pi}^{0} D_N(t)f(x-t)dt = -\int_{\pi}^{0} D_N(-u)f(x+u)du = \int_0^{\pi} D_N(u)f(x+u)du$$

de sorte que

$$S_N f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_N(t)\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}dt$$

d'où

$$S_N f(x) - \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-)) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin((N+1/2)t)\, \underbrace{\frac{t/2}{\sin t/2}\frac{f(x+t)-f(x^+)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x^-)}{t}}_{g_x(t)}\, dt$$

avec h_x intégrable d'après les hypothèses sur f. Là encore, le lemme de Riemann-Lebesgue permet de conclure. □

Corollaire 2.2.1

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ admettant des limites à gauche et à droite ainsi que des dérivées à gauche et à droite en tout point. Alors pour tout x, $S(f)(x)$ converge vers $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$.

Preuve. Notons $f'(x^+) = \lim_{t\to 0 t>0} \frac{f(x+t)-f(x^+)}{t}$.
Soit $\eta > 0$ tel que si $0 \le t \le \eta$, $\left|\frac{f(x+t)-f(x^+)}{t}\right| \le f'(x^+)+1$. Alors

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^{2\pi} \frac{f(x+t)-f(x^+)}{t}dt\Big| &\le \Big|\int_0^{\eta} \frac{f(x+t)-f(x^+)}{t}dt\Big| + \Big|\int_{\eta}^{2\pi} \frac{f(x+t)-f(x^+)}{t}dt\Big| \\ &\le \eta(f'(x^+)+1) + \frac{1}{\eta}\Big|\int_0^{2\pi} f(x+t)-f(x^+)dt\Big| \\ &\le \eta(f'(x^+)+1) + \frac{1}{\eta}(||f||_1 + 2\pi f(x^+)) < +\infty\end{aligned}$$

On montre de même que $\int_0^{2\pi} \frac{f(x-t)-f(x^-)}{t}dt$ est finie et le théorème de Dirichlet s'applique. □

2.2.2 Théorème de Fejér

L'idée du théorème de Fejér est d'étudier la convergence *au sens de Cesàro* de la suite des sommes partielles $(S_N f)_N$.

Définition 2.6

Le noyau de Fejér d'ordre N est $K_N := \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n$.

Propriété 2.2.2

1. Pour tout $N \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$ $K_N(x) = \dfrac{1}{N+1}\dfrac{\sin^2 \frac{(N+1)x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}$.

2. $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} K_N d\mu = 1$.

Preuve. 1. Comme pour le noyau de Dirichlet, c'est un calcul classique à avoir vu au moins une fois :

$$\begin{aligned}
K_N(x) &= \frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin x/2}\sum_{n=0}^{N}\sin((n+1/2)x)\\
&= \frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin x/2}\mathrm{Im}\sum_{n=0}^{N} e^{i(n+1/2)x}\\
&= \frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin x/2}\mathrm{Im}\, e^{ix/2}\frac{1-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}}\\
&= \frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin x/2}\mathrm{Im}\, e^{ix(N+1)/2}\frac{-2i\sin\frac{(N+1)x}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}}\\
&= \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2\frac{(N+1)x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

... et à savoir refaire !

2. $\displaystyle\int_T K_N d\mu = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\int_T D_N d\mu$ avec $\displaystyle\int_T D_N d\mu = 1$. □

Proposition 2.2.3

La suite $(K_N)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

Preuve. La première condition est clairement vérifiée par ce qui précède.
D'après ce qui précède, K_N est positif donc $||K_N||_1 = \int_T K_N d\mu = 1$, ce qui donne la seconde condition.
Pour la troisième, notons que par parité de K_N, pour $\delta > 0$

$$\int_{[-\pi,\pi]\setminus]-\delta,\delta[} K_N(t)dt = 2\int_{\delta}^{\pi} K_N(t)dt \leq \frac{2}{N+1}\frac{1}{\sin^2(\delta/2)}\int_{\delta}^{\pi}\sin\frac{(N+1)x}{2}dx \leq \frac{1}{N+1}\frac{\pi-\delta}{\pi\sin^2(\delta/2)}$$

et le terme majorant tend bien vers 0 quand $N \to \infty$. □

Le théorème de Fejér qui suit est alors une conséquence immédiate de la proposition précédente (et de la compacité de $\mathbb{T}$ pour la seconde proposition).

Théorème de Fejér

1. Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ mesurable bornée continue en x. Alors $\lim_{N\to\infty} K_N * f(x) = f(x)$.
2. Soit $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ continue. Alors $K_N * g$ converge uniformément vers g.
3. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, alors $\lim_{N\to\infty} ||K_N * f - f||_1 = 0$.

Notation : On note $\sigma_N f = K_N * f = \dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{n=0}^{N} S_n f = \dfrac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n * f$.

Corollaire 2.2.2

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$.
1. Si f a des limites à gauche et à droite en x et si $S(f)(x)$ converge, alors $S(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.
2. Si la suite $(S_N f)_N$ converge dans $L^1(\mathbb{T})$, elle converge vers f.
3. Si la suite $(S_N f)_N$ converge simplement vers une fonction g, alors $f = g$ presque partout.

Preuve. Les deux premiers points sont des conséquences du fait que le procédé de Cesàro conserve les limites.
1. $S(f)(x) = \lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = f(x)$.
2. Notons g la limite dans $L^1(\mathbb{T})$ de la suite $(S_N f(x))_N$. Alors

$$\begin{aligned} ||\sigma_N f - g||_1 &= \int_T \Big| \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n f - g \Big| d\mu \\ &\leq \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\int_T |S_n f - g| d\mu = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} ||S_n f - g||_1 \end{aligned}$$

d'où $\sigma_N f$ converge g dans $L^1(\mathbb{T})$ et le 3. du théorème de Fejér permet de conclure.
3. Pour tout x, $\lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = \lim_{N\to\infty} S_N f(x) = g(x)$. Comme $||\sigma_N f - f||_1 \to 0$, il existe $A \subset \mathbb{T}$ de mesure pleine et une extraction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $x \in A$, $\lim_{N\to\infty} \sigma_{\psi(N)} f(x) = f(x)$, donc pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$. □

Corollaire 2.2.3

La transformée de Fourier disccrète $\mathscr{F}_d$ est injective.

Preuve. Soit $f \in \ker \mathscr{F}_d$. Alors pour tout n, $S_n f = 0$, donc pour tout N, $\sigma_N f = 0$ et d'après le 3. du théorème de Fejér, $||f||_1 = 0$. □

Proposition 2.2.4

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ a des limites à gauche et à droite en x, $\lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

Preuve. Remarquons que, par parité de K_N et changement de variable

$$\int_{-\pi}^{0} K_N(t) f(x-t) dt = -\int_{\pi}^{0} K_N(-u) f(x+u) du = \int_{0}^{\pi} K_N(u) f(x+u) du$$

de sorte que

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_N(t)(f(x+t)+f(x-t))dt$$

d'où

$$\sigma_N f(x) - \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_N(t)(f(x+t)-f(x^+)+f(x-t)-f(x^-))dt$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ tel que si $0 \leq t \leq \delta$, $|f(x+t)-f(x^-)| \leq \varepsilon$ et $|f(x-t)-f(x^-)| \leq \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned}
\sigma_N f(x) - \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-) &\leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\delta} K_N(t)dt + \int_{\delta}^{\pi} K_N(t))(f(x+t)-f(x^+)+f(x-t)-f(x^-))dt \\
&\leq \varepsilon + \max_{[\delta,\pi]} K_N \int_{\delta}^{\pi})(f(x+t)-f(x^+)+f(x-t)-f(x^-))dt \\
&\leq \varepsilon + \frac{1}{N+1}\frac{\pi}{\sin^2(\delta/2)}(2||f||_1 + |f(x^+)|+|f(x^-)|)
\end{aligned}$$

le terme multiplié par $\frac{1}{N+1}$ étant fini. □

Le théorème de Fejér permet de retrouver de manière très simple le théorème de Stone-Weierstraß. On note $\mathbf{T}$ l'espace des polynômes trigonométriques, c'est-à-dire

$$\mathbf{T} := \mathrm{Vect}\{e_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Théorème 2.1 (Densité des polynômes trigonométriques)

L'espace $\mathbf{T}$ est dense dans les espaces suivants :

1. *$C^0(\mathbb{T})$ muni de $||\cdot||_\infty$,*
2. *$L^1(\mathbb{T})$ muni de $||\cdot||_1$,*

2.2.3 Le cas hilbertien $L^2(\mathbb{T})$

Muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{T}} f\bar{g}d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\bar{g}(t)dt$, l'espace $L^2(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert.

Proposition 2.2.5

1. *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée.*
2. *Notons pour $N \geq 0$, $P_N := \mathrm{Vect}\{e_n \,|\, -N \leq n \leq N\}$ et $p_N : L^2(\mathbb{T}) \to P_N$ la projection orthogonale. Alors pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, $p_N(f) = S_N f$.*

Preuve. Le 1. est une simple vérification. Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $|n| \leq N$. Alors $\langle e_n, f - S_N f\rangle = c_n(f) - c_n(f) = 0$. Donc $S_N f \perp f - S_N f$. □

Corollaire 2.2.4 (Inégalités de Bessel)

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leq ||f||_2^2.$$

Preuve. Immédiat d'après la proposition car alors $||S_N f||_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2$. □

Théorème d'Identité de Parceval

Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\lim_{N\to+\infty} ||S_N f - f||_2 = 0$. De plus

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = ||f||_2^2.$$

Preuve. Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Par définition du projeté orthogonal $||S_N f - f||_2$ réalise la distance $d(f, P_N)$ de f à P_N dans L^2. Montrons que cette distance tend vers 0 quand $N \to \infty$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ continue telle que $||f - g||_2 \leq \varepsilon$. D'après le théorème de Fejér, $||g - \sigma_N g||_\infty \to 0$ quand $N \to \infty$. Donc il existe N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$, $||\sigma_N g - g||_\infty \leq \varepsilon$. Alors

$$||f - \sigma_N g||_2 \leq ||f - g||_2 + ||g - \sigma_N g||_2 \leq ||f - g||_2 + ||g - \sigma_N g||_\infty \leq 2\varepsilon$$

L'arbitraire sur ε donne le résultat car pour tout N et toute g, $\sigma_N g \in P_N$.
Puisque $\langle f - S_N f, S_N f\rangle = 0$, $||f||^2 = ||S_N f||^2 + ||f - S_N f||^2$. D'où

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 = \lim_{N\to\infty} ||S_N f||^2 = ||f||^2$$

ce qui donne l'identité de Parceval. □

Remarque 2.2.2. On retrouve à nouveau la densité des polynômes trigonométriques dans $L^2(\mathbb{T})$. Un raisonnement complètement analogue permet de montrer la densité des polynômes trigonométriques dans $L^p(\mathbb{T})$ (en revanche, rappelons à toute fini utile que seul $L^2(\mathbb{T})$ est muni d'une structure hilbertienne).

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc une famille orthonormée et totale de $L^2(\mathbb{T})$, autrement dit :

Théorème 2.2

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

2.3 Résultats de divergence

Un G_δ d'un espace topologique est une intersection dénombrable d'ouverts denses. Par exemple l'ensemble des irrationnels est un G_δ de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{q\}.$$

On constate sur cet exemple que le G_δ obtenu est dense. Cette propriété est plus généralement vraie dans tout espace complet, c'est le théorème de Baire [1] :

Théorème de Baire

Dans un espace complet, tout G_δ est dense.

Nous renvoyons à tout bon livre de topologie pour une preuve du théorème de Baire.

1. On dit qu'un espace topologique X vérifie la « propriété de Baire » si *tout G_δ de X est dense dans X.*

Le but de cette section est de prouver le résultat suivant.

Théorème 2.3

Soit D une partie dénombrable de $\mathbb{T}$. L'ensemble des fonctions f telles que la série $S(f)$ diverge en tout $x \in D$ contient un G_δ dense de $\mathscr{C}^0(\mathbb{T})$.

Nous utiliserons le théorème de Banach-Steinhaus.

Théorème de Banach-Steinhaus

Soit E et F deux espaces de Banach et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Alors

ou bien il existe $M > 0$ tel que pour tout $i \in I$, $|||f_i||| \leq M$

ou bien il existe un G_δ de E noté G tel que pour tout $x \in G$, $\sup_i ||f_i(x)|| = +\infty$.

La forme de l'énoncé n'étant pas la plus usuelle, nous allons prouver ce résultat et nous commençons par une petite digression sur les fonctions semi-continues inférieurement.

Fonctions semi-continues

Soit X un espace topologique, $f : X \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in X$.
On dit que f est *semi-continue inférieurement* (s.c.i)en x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$ $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$.
On dit que f est *semi-continue supérieurement* (s.c.s) en x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$ $f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$.
On dit que f est semi-continue inférieurement si elle l'est en tout point, et semi-continue supérieurement si elle l'est en tout point.

Remarque 2.3.1. f est continue en x_0 si et seulement si elle est à la fois s.c.i et s.c.s en x_0.

Proposition 2.3.1

Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. *f est s.c.i.*
2. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, a])$ est fermé.*
3. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]a, +\infty[)$ est ouvert.*
4. *L'épigraphe de f (c'est-à-dire l'ensemble $\{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \,|\, t \leq f(x)\}$) est fermé.*

2. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. *f est s.c.s.*
2. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([a, +\infty)$ est fermé.*
3. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, a[)$ est ouvert.*
4. *L'ensemble $\{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \,|\, t \geq f(x)\}$) est fermé.*

Preuve. Nous ne traitons que le cas s.c.i, le cas s.c.s est analogue. Clairement 2. $\Longleftrightarrow$ 3. Montrons 1. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 4.$\Rightarrow$ 1.
• 1. $\Rightarrow$ 3. . Soit $a \in \mathbb{R}$ et $x \in f^{-1}(]a, +\infty[)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) - \varepsilon > a$. Il existe V voisinage de x tel que pour tout $y \in V$, $f(y) \geq f(x) - \varepsilon > a$.
• 3. $\Rightarrow$ 4. Notons $E(f)$ l'épigraphe de f. Alors $E(f)^c = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} f^{-1}(]a, +\infty[) \times]-\infty, a[$. En effet, Notons Z ce deuxième ensemble. Si $(y,t) \in Z$, alors il existe a tel que $f(y) > a > t$ et

$(y,t) \in E(f)^c$. Réciproquement si $(y,t) \in E(f)^c$, alors $f(y) > t$ et pour $a \in]t, f(y)[$ $(y,t) \in f^{-1}(]a,+\infty[) \times]-\infty, a[$. Le complémentaire de $E(f)$ est donc ouvert comme union d'ouverts.
• 4. $\Rightarrow$ 1. Soit $x \in X$ et soit $\varepsilon > 0$. $(x, f(x)-\varepsilon) \in E(f)^c$ qui est ouvert par hypothèse. Donc il existe O voisinage de $(x, f(x)-\varepsilon)$ tel que pour tout $(y,t) \in O$, $(y,t) \in E(f)^c$. Il existe en particulier V voisinage de x tel que $V \times \{f(x)-\varepsilon\} \in E(f)^c$, c'est à dire que pour tout $y \in V, f(y) > f(x) - \varepsilon$. □

Proposition 2.3.2

Soit $(f_i)_i$ une famille d'applications continues $X \to \mathbb{R}$. Alors la fonction $\sup_i f_i$ est s.c.i.

Preuve. Utilisons la seconde caractérisation des fonctions s.c.i. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout i, $f_i^{-1}(]_\infty, a])$ est fermé car les f_i sont continues. Or si on note $\varphi = \sup_i f_i$, $\varphi^{-1}(]-\infty, a]) = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(]-\infty,a])$ qui est fermé comme intersection de fermés. □

Nous pouvons maintenant prouver le théorème de Banach-Steinhaus.

Preuve du théorème de Banach-Steinhaus. Notons $\varphi := x \mapsto \sup_i ||f_i(x)|| \in \bar{\mathbb{R}}_+$: c'est application s.c.i d'après la proposition précédente. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $V_n := \{x \in E \,|\, \varphi(x) > n\}$: c'est un ouvert de E. On est alors confrontés à l'alternative suivante :

1. l'un des V_n n'est pas dense
2. tous les V_n sont denses.

Dans le premier cas, soit n tel que V_n n'est pas dense. Il existe $z \in E$ et $r > 0$ tel que $\overline{B(z,r)} \cap V_n = \emptyset$. Donc pour tout $x \in \overline{B(z,r)}$, $\varphi(x) \leq n$. Alors pour tout $x \in \overline{B(0,r)}$ et pour tout $i \in I$

$$||f_i(x)|| \leq ||f_i(x+z)|| + ||f_i(z)|| \leq 2n$$

puis pour tout x dans la sphère unité de E, et pour tout $i \in I$

$$||f_i(x)|| = \frac{1}{r}||f_i(rx)|| \leq \frac{2n}{r}$$

d'où, pour tout $i \in I$ $|||f_i||| \leq \frac{2n}{r}$.
Dans le second cas, d'après le théorème de Baire $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ est dense et par définition même de G, pour tout $x \in G$, $\sup_i ||f_i(x)|| = +\infty$. □

Pour prouver le théorème théorème 2.3, nous avons encore besoin de deux lemmes

Lemme 2.2

$||D_N||_1 \sim \dfrac{4}{\pi^2} \log N.$

Esquisse de preuve. La preuve n'est pas difficile mais assez calculatoire, nous la laissons en exercice.
1. Montrer l'existence d'une suite bornée $(u_N)_{N\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$||D_N||_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\frac{t}{2}}\right| dt + u_N,$$

2. Montrer que

$$\int_0^\pi \left|\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\frac{t}{2}}\right| dt = 2\sum_{n=0}^{N-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} + v_N,$$

où $(v_N)_{N\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est telle que $\lim_{N\to\infty} v_N = 0$. 3. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \right) + \sum_{k=1}^{N-1} w_k,$$

où $(w_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est telle que $|w_k| \leq \frac{1}{k^2\pi}$.

4. Déduire des questions précédentes l'équivalent suivant :

$$||D_N||_1 \sim \frac{4}{\pi^2} \log N.$$

Rappelons que la suite $(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la *constante d'Euler* γ. $\square$

Lemme 2.3

Pour $x \in \mathbb{T}$ et $N \in \mathbb{N}$, notons $S_N x : \mathscr{C}(\mathbb{T}) \to \mathbb{C} : f \mapsto S_n f(x)$, où $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ est muni de $|| \cdot ||_\infty$. L'application $S_N x$ est continue et $|||S_N x||| = ||D_N||_1$.

Preuve. Remarquons que

$$|S_N x(f)| = |S_N f(x)| \leq \int_{\mathbb{T}} |f(t)| D_N(x-t) d\mu(t) \leq ||f||_\infty ||D_N||_1$$

ce qui montre que $S_N x$ est continue et que $|||S_N x||| \leq ||D_N||_1$. Soit $\varepsilon > 0$. On va construire $g \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ telle que $||g||_\infty = 1$ et $|S_N x(g)| \leq ||D_N||_1 - \varepsilon$. Posons

$$E_N^+ := \{x \mid D_N(x) > 0\}, \quad E_N^- := \{x \mid D_N(x) < 0\}, \quad \text{et} \quad \varphi_N = \mathbb{1}_{E_N^+} - \mathbb{1}_{E_N^-}$$

de sorte que $S_N x(\tau_x \varphi_N) = ||D_N||_1$. En effet

$$\begin{aligned} S_N x(\tau_x(\varphi_N)) &= \sum_{-N}^{N} c_n(\tau_x \varphi_N) e^{inx} \\ &= \sum_{-N}^{N} e^{-inx} c_n(\varphi_N) e^{inx} = \sum_{-N}^{N} c_n(\varphi_N). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{-N}^{N} c_n(\varphi_N) &= \sum_{-N}^{N} \int_{\mathbb{T}} \varphi_N(t) e^{-int} d\mu(t) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \varphi_N(t) \sum_{n=-N}^{N} e^{int} d\mu(t) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \varphi_N(t) D_N(t) d\mu(t) \\ &= \int_{E_N^+} D_N(t) d\mu(t) - \int_{E_N^-} D_N(t) d\mu(t) = ||D_N||_1 \end{aligned}$$

D'après le théorème de Lusin, il existe $g \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ telle que

— $\mu(\{z \mid g(z) \neq \tau_x \varphi_N(z)\}) \leq \frac{\varepsilon}{2||D_N||_\infty}$

— $||g||_\infty \leq ||\tau_x \varphi_N||_\infty$.

Alors $||g||_\infty = 1$ car sinon elle différerait de φ_N sur $E_N^+ \cap E_N^-$ qui est de mesure pleine. Alors

$$\begin{aligned}
S_N x(g) &= S_N x(g - \tau_x\varphi_N + \tau_x\varphi_N) \\
&= S_N x(\tau_x\varphi_N) - S_N x(g - \tau_x\varphi_N) \\
&= ||D_N||_1 - \int_{\mathbb{T}} D_N(x-t)(g - \tau_x\varphi_N)(t)d\mu(t) \\
&= ||D_N||_1 - \mu(\{t \,|\, \tau_x\varphi_N(t) \neq g(t)\})||D_N||_\infty ||\tau_x\varphi_N - g||_\infty \geq ||D_N||_1 - \varepsilon
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait et qui permet de conclure. □

Preuve du théorème théorème 2.3. Soit $x \in \mathbb{T}$. Appliquons le théorème de Banach-Steinhaus à la famille $(S_N x)_N$. On a vu que $|||S_N x||| = ||D_N||_1 \sim_\infty \frac{4}{\pi^2}\log N$ donc il existe un G_δ dense G_x de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ tel que pour toute $f \in G_x$, $\lim_{N\to\infty} |S_N x(f)| = +\infty$. Soit D une partie dénombrable de $\mathbb{T}$, puisque $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ est complet pour $||\cdot||_\infty$, l'intersection $\bigcap_{x\in D} G_x$ est encore un G_δ dense de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$. □