Chapitre 4

Espace de Schwartz et distributions tempérées

4.1 Espace de Schwartz

Définition 4.1

Étant donnée $\phi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, on dit que

— ϕ est à décroissance rapide si pour tout $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d]$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^d$,

$$\lim_{||x|| \to \infty} |P(x) D^\beta(\phi(x)| = 0$$

— ϕ est à croissance modérée si pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout x

$$\sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \le k}} |D^\alpha \phi(x)| \le C(1 + ||x||)^N.$$

On note $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions à décroissance rapide, appelé aussi espace de Schwartz et $\mathscr{C}_M^\infty(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions à croissance modérée.

Exemple 4.1.1. $x \mapsto e^{-||x||}$ est à décroissance rapide. Tout polynôme est à croissance modérée.

Remarque 4.1.1. 1) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathscr{C}_M^\infty(\mathbb{R}^d)$ sont des sous-espaces vectoriels de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$.
2) $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.
3) Pour ϕ de classe C^∞ les assertions suivantes sont équivalentes :

— $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,

— pour tous α, β dans $\mathbb{N}^d$, $\lim_{||x|| \to \infty} |X^\alpha(x) D^\beta \phi(x)| = 0$.

Proposition 4.1.1

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset \bigcap_{p \ge 1} L^p(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. Les éléments de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ sont clairement bornés. Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $p \ge 1$. Puisque $\lim_{||x|| \to \infty} ||x||^{2(d+1)} |\phi(x)| = 0$, $\phi(x)^p = o(\frac{1}{||x||^{2p(d+1)}})$. Cette dernière fonction étant intégrable sur $\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)$, $\phi \in L^p(\mathbb{R}^d)$. □

Remarque 4.1.2. Pour $1 \le p < \infty$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ car contient $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ qui l'est.

Propriété 4.1.1

L'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par

1. *conjugaison et composée par $x \mapsto -x$,*
2. *dérivation,*
3. *translation,*
4. *produit et produit par $f \in \mathscr{C}_M^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Le deuxième point est immédiat par définition. Le premier est trivial. Avant de prouver les deux autres, énonçons la formule de Leibniz qui sera utile pour les stabilités par produit.

Formule de Leibniz. Pour α, β deux éléments de $\mathbb{N}^d$, on note $\binom{\alpha}{\beta}$le coefficient multinomial défini par

$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^{d} \binom{\alpha_i}{\beta_i}$$

où bien sûr $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$. La formule de Leibniz pour laquelle nous demandons à être cru sur parole[1] assure que pour f et g de classe C^k et β de longueur inférieure à k,

$$D^\beta(fg) = \sum_{\alpha \prec \beta} \binom{\beta}{\alpha} D^\alpha f D^{\beta-\alpha} g$$

où $\beta - \alpha = (\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_d - \alpha_d)$.

Preuve de la propriété. 3. Remarquons que si $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d]$, et $a \in \mathbb{R}^d$, $P(x) = P(x + a - a) = \tau_a Q(x)$ où $Q : x \mapsto P(x + a) \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d]$. Alors pour $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d$ et $\beta \in \mathbb{N}^d$,

$$P(x)\tau_a\phi(x) = \tau_a(Q\phi)(x) \quad \text{et} \quad P(x)D^\beta\phi(x) = \tau_a(QD^\beta\phi)(x)$$

qui tendent bien vers 0 à l'infini.
4. Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,$f$ de classe C^∞ et P un polynôme. D'après la formule de Leibniz pour $x \in \mathbb{R}^d$et $\beta \in \mathbb{N}^d$

$$|P(x)D^\beta(f\phi)(x)| \le \sum_{\alpha \prec \beta} \binom{\beta}{\alpha} |P(x)D^\alpha f(x) D^{\beta-\alpha}\phi(x)|.$$

Posons $c = \max_{\alpha \prec \beta} \binom{\beta}{\alpha}$. Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ alors $m := \max_{\alpha \prec \beta} ||D^\alpha f||_\infty < \infty$ et

$$|P(x)D^\beta(f\phi)(x)| \le c \cdot m \sum_{\alpha \prec \beta} \binom{\beta}{\alpha} |P(x)D^{\beta-\alpha}\phi(x)|$$

la quantité de droite tendant vers 0 à l'infini et $f\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ Si $f \in \mathscr{C}_M(\mathbb{R}^d)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tel que pour tout $\alpha \le \beta$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, $|D^\alpha f(x)| \le C(1 + ||x||)^N$. Pour $||x|| \ge 1$, $||x||^2 \ge ||x||$ donc pour $||x|| \ge 1$, $D^\alpha f(x)| \le C(1 + ||x||^2)^N = Q(x) \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d]$. Ainsi

$$|P(x)D^\beta(f\phi)(x)| \le c \sum_{\alpha \prec \beta} \binom{\beta}{\alpha} |P(x)Q(x)D^{\beta-\alpha}\phi(x)|$$

et là encore la quantité de droite tend vers 0 à l'infini. □

Corollaire 4.1.1

Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

1. mais bien sûr un lecteur motivé peut *s'amuser* à la démontrer...

Preuve. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1+||x||)^k |f(x)| dx \leq \int_{B(0,1)} (1+||x||)^k |f(x)| dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)} (1+||x||^2)^k |f(x)| dx.$$

La première intégrale du membre de droite est fini par continuité de l'intégrande, la seconde intégrale est fini car $x \mapsto (1+||x||^2)^k$ est un polynôme, donc $x \mapsto (1+||x||^2)^k f(x)$ est un élément de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On conclut alors par la proposition 3.1.5. □

Pour $p \in \mathbb{N}$ et $\phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, on note

$$\mathcal{N}_p(\phi) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq p \\ |\beta| \leq p}} ||X^\alpha D^\beta \phi||_\infty \in [0, +\infty].$$

Proposition 4.1.2

Soit $\phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si pour tout p, $\mathcal{N}_p(\phi) < \infty$.

Remarque 4.1.3. Pour ϕ de classe C^∞ les assertions suivantes sont équivalentes :
— pour tout p, $\mathcal{N}_p(\phi) < \infty$,
— pour tous α, β dans $\mathbb{N}^d$, $||X^\alpha D^\beta \phi||_\infty < \infty$.

Preuve. Si $\phi \in S_j(\mathbb{R}^d)$, d'après la remarque 4.1.1, pour tous multi-entiers α, β, $X^\alpha D^\beta \phi$ est borné et donc pour tout p, $\mathcal{N}_p(\phi) < \infty$.
Supposons que pour tout p, $\mathcal{N}_p(\phi) < \infty$. Soit α, β multi-entiers. Pour $x \in \mathbb{R}^d$;

$$||x||^2 X^\alpha(x) D^\beta \phi(x) = \sum_{j=1}^d X^{\alpha(j)}(x) D^\beta \phi(x)$$

où si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d, \alpha(j) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_j + 2, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_d)$. Alors pour $x \neq 0$

$$|X^\alpha(x) D^\beta \phi(x)| \leq \frac{1}{||x||^2} \sum_{j=1}^d ||X^{\alpha(j)} D^\beta \phi||_\infty \leq \frac{1}{||x||^2} \mathcal{N}_p(\phi)$$

pour $p \leq |\alpha| + |\beta| + 2$. Cette dernière quantité tend vers 0 en l'infini ce qui permet de conclure par la remarque 4.1.1. □

Corollaire 4.1.2

$\mathscr{F}$ est un isomorphisme de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ d'inverse $\mathscr{F}^{-1} : f \mapsto \mathscr{F}(\check{f})$.

Preuve. Il suffit de montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par $\mathscr{F}$. En effet puisque $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, pour $f \in S_j(\mathbb{R}^d)$ $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et on sait qu'alors $\mathscr{F}^2(f) = \check{f}$. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Vérifions que pour tous multi-entiers α, β, $||X^\alpha D^\beta f||_\infty < \infty$.
D'après les propositions 3.1.5 et 3.1.6,

$$X^\alpha D^\beta \hat{f} = (-2i\pi) X^\alpha \widehat{X^\beta f} = (-1)^{|\beta|} (2i\pi)^{|\beta| - |\alpha|} \widehat{D^\alpha X^\beta} f$$

d'où

$$||X^\alpha D^\beta \hat{f}||_\infty = (2\pi)^{|\beta| - |\alpha|} ||\widehat{D^\alpha X^\beta} f||_\infty \leq (2\pi)^{|\beta| - |\alpha|} ||D^\alpha X^\beta f||_1.$$

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ étant stable par dérivation et produit par un polynôme, $D^\alpha X^\beta f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ ce qui donne la conclusion. □

À ce stade, nous n'avons pas muni l'espace de Schwartz d'une topologie. Chaque $\mathcal{N}_p$ définit une norme sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, mais pour aucune de ces normes, l'espace n'est complet. Comme on aime bien les espaces complets, on va munir $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ d'une distance donnée par la famille de normes $\mathcal{N}_p$. La topologie ainsi obtenue n'est pas une topologie d'espace normé.

4.1.1 Topologie sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Notons d la distance sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$d(\phi, \psi) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^p} \min(1, \mathcal{N}_p(\phi - \psi)).$$

Il s'agit bien d'une distance, la symétrie, la séparation et l'inégalité triangulaire découlant de celles des normes $\mathcal{N}_p$. Les facteurs $\frac{1}{2^p}$ assurent par ailleurs la convergence de la série.

Théorème 4.1

L'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est complet pour la distance d.

Théorème 4.2

L'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Nous n'utiliserons pas ces résultats dans la (courte) suite du cours, aussi nous les admettons.

Proposition 4.1.3

Une suite $(\phi_n)_n$ une suite de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ converge vers $\phi \in Sj(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_p(\phi_n - \phi) \to 0$.

Preuve. Le sens $\Rightarrow$ est clair, montrons la réciproque. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe p_0 tel que $\sum_{p>p_0} \frac{1}{2^p} \leq \varepsilon$ et il existe N tel que pour tout $n \geq N$ $\mathcal{N}_{p_0}(\phi_n - \phi) \leq \varepsilon$, donc pour $p \leq p_0$ et $n \geq N$, $\mathcal{N}_p(\phi_n - \phi) \leq \varepsilon$. Alors pour $n \geq N$, $d(\phi_n, \phi) \leq 2\varepsilon(1 - \frac{1}{2^{p_0+1}}) + \varepsilon \leq 3\varepsilon$. □

Corollaire 4.1.3

1) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $D^\alpha : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est continu.
2) Pour tout $g \in \mathscr{C}^\infty_M(\mathbb{R}^d)$, l'application $\mathfrak{p}_g : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) : f \mapsto gf$ est continue.

Preuve. 1). Pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_p(D^\alpha f) \leq \mathcal{N}_{p+|\alpha|}(f)$.
2). Soit $g \in \mathscr{C}^\infty_M(\mathbb{R}^d)$ et $p \in \mathbb{N}$. Soit $c_p > 0$ et $N_p \in \mathbb{N}$ tels que pour tout x

$$\sup_{|\beta|\leq p} |D^\beta g(x)| \leq c_p(1 + ||x||)^{N_p}.$$

D'où pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$

$$D^\alpha fg(x) \leq \sum_{\beta\prec\alpha} \binom{\alpha}{\beta} |D^\beta g(x)||D^{\alpha-\beta} f(x)| \leq \gamma c_p \max(2^p, 1 + ||x||^2)^{N_p} |D^{\alpha-\beta} f(x)|$$

où $\gamma = \max\{\binom{\alpha}{\beta} \mid \beta \prec \alpha\}$. Il existe donc $C_p > 0$ telle que $\mathcal{N}_p(fg) \leq C_p \mathcal{N}_{p+2N_p}(f)$. □

Remarque 4.1.4. La constante C_p et l'entier N_p dans la preuve ci-dessous dépendent bien entendu de g. On devrait les noter $C_p(g)$ et $N_p(g)$.

Théorème 4.3

La transformée de Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est un homéomorphisme.

La preuve repose sur le lemme suivant.

Lemme 4.1

Soit s la fonction à valeurs positive définie par $s(x) = 1 + \sum_{i=1}^d |x_i|^{d+1}$. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\sum_{\substack{|\alpha|\le p \\ |\beta|\le p}} ||X^\beta D^\alpha f||_1 \le \mathscr{N}_{p+d+1}(f) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{s(x)}.$$

Preuve. Pour β, α multi-entiers

$$\begin{aligned} ||X^\beta D^\alpha f||_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} |X^\beta(x) D^\alpha f(x)| \frac{s(x)}{s(x)} dx \\ &\le ||sX^\beta D^\alpha f||_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{s(x)} \\ &\le \Big(||X^\beta D^\alpha f||_\infty + \sum_{j=1}^d ||X^{\beta(j)} D^\alpha f||_\infty \Big) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{s(x)} \end{aligned}$$

avec $|\beta(j)| = |\beta| + d + 1$. D'où

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{|\alpha|\le p \\ |\beta|\le p}} ||X^\beta D^\alpha f||_1 &\le \sum_{\substack{|\alpha|\le p \\ |\beta|\le p}} \Big(||X^\beta D^\alpha f||_\infty + \sum_{j=1}^d ||X^{\beta(j)} D^\alpha f||_\infty \Big) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{s(x)} \\ &\le \Big(\sum_{\substack{|\alpha|\le p \\ |\beta|\le p+d+1}} ||X^\beta D^\alpha f||_\infty \Big) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{s(x)} \le \mathscr{N}_{p+d+1}(f) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{s(x)}. \end{aligned}$$

ce qui était attendu. □

Preuve du théorème. On a déjà vu que $\mathscr{F}$ est un isomorphisme d'inverse $f \to \mathscr{F}(\check{f})$. Il suffit donc de montrer la continuité de $\mathscr{F}$. Pour $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathscr{N}_p(\hat{f}) = \sum_{\substack{|\alpha|\le p \\ |\beta|\le p}} ||X^\beta D^\alpha \hat{f}||_\infty &\le \sum_{\substack{|\alpha|\le p \\ |\beta|\le p}} (2\pi)^{|\alpha|-|\beta|} ||D^\beta (X^\alpha f)||_1 \\ &\le (2\pi)^p \sum_{\substack{|\alpha|\le p \\ |\beta|\le p}} ||D^\beta (X^\alpha f)||_1. \end{aligned}$$

Puisque $D^\gamma X^\alpha = \prod_{j=1}^d \frac{\alpha_j!}{(\alpha_j-\gamma_j)!} X^{\alpha-\gamma}$, la formule de Leibniz donne l'existence de $c > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \mathscr{N}_p(\hat{f}) &\le c(2\pi)^p \sum_{\substack{|\alpha|\le p \\ |\beta|\le p}} \sum_{\gamma \prec \beta} ||X^{\alpha-\gamma} D^{\beta-\gamma} f)||_1 \\ &\le c(2\pi)^p \sum_{\substack{|\alpha'|\le p \\ |\beta'|\le p}} ||X^{\alpha'} D^{\beta'} f)||_1 \end{aligned}$$

et le lemme permet alors de conclure. □