

1.2 Régularisation

1.2.1 Convolution et approximations de l'unité

Théorème 1.2

Soit f et g dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Pour presque tout x , la fonction $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K} : t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable. On note alors

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)dt.$$

L'application $f * g$ est intégrable et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Preuve. Posons $H : (x, t) \mapsto f(t)g(x-t)$. L'application H est mesurable². Le théorème de Fubini-Tonelli et la formule du changement de variable permettent alors d'écrire

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |f(t)g(x-t)| dx dt = \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-t)| dx dt = \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| \int_{\mathbb{R}^d} |g(u)| du dt = \|f\|_1 \|g\|_1$$

et H est intégrable. Le théorème de Fubini permet alors de conclure. $\square$

L'inégalité de Hölder permet de montrer la proposition suivante.

Proposition 1.2.1

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout x , $f * g$ est bien définie.

On peut en fait montrer que $f * g$ est de plus uniformément continue, ce sera fait en fin de partie dans le théorème 1.4.

La proposition suivante est une conséquence du théorème de Fubini.

Proposition 1.2.2

Soit f, g, h dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

1. $f * f = g * f$
2. $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Définition 1.3

Étant donné un corps $\mathbb{K}$, une $\mathbb{K}$ -algèbre $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une application $\mathbb{K}$ -bilinéaire $\star : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. On dit qu'elle est associative si l'application $\star$ est associative et commutative si $\star$ est commutative. On dit qu'elle est unitaire s'il existe $a_0 \in \mathcal{A}$ tel que pour tout $a \in \mathcal{A}$, $a \star a_0 = a_0 \star a = a$.

Remarque 1.2.1. Il existe des $\mathbb{K}$ -algèbres non associatives comme par exemple la $\mathbb{R}$ -algèbre des octonions.

Corollaire 1.2.1

$(L^1(\mathbb{R}^d), +, *, \times)$ est une algèbre associative et commutative.

² C'est ici qu'il est utile de considérer des fonctions boréliennes : H est borélienne comme produit et composée de fonctions boréliennes. Si f et g ne sont pas boréliennes, il faut en toute rigueur en prendre des représentants boréliens pour justifier de la mesurabilité de H .

1.2. Régularisation

Remarque 1.2.2. Nous verrons plus tard que $L^1(\mathbb{R}^d)$ n'est pas unitaire.

Proposition 1.2.3

Soit f, g dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\text{supp } f * g \subset \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}$

Preuve. Montrons $(\overline{\text{supp } f + \text{supp } g})^c \subset (\text{supp } f * g)^c$. Pour cela, appliquons le lemme ???. Soit $x_0 \notin \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}$. Soit $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}^c = \emptyset$. Soit ϕ bornée à support dans $\overline{B(x_0, r)}$.

$$\int_{B(x_0, r)} \phi(x) f * g(x) dx = \int_{B(x_0, r)} \phi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x - y) dy \right) dx$$

Or, d'après Fubini-Tonnelli et la formule du changement de variable

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, r)} |\phi(x)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(y) g(x - y)| dy dx &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \int_{B(x_0, r)} |\phi(x)| |g(x - y)| dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \int_{B(x_0 - y, r)} |\phi(z + y)| |g(z)| dz dy \\ &= \int_{\text{supp } f} |f(y)| \int_{B(x_0 - y, r) \cap \text{supp } g} |\phi(z + y)| |g(z)| dz dy \end{aligned}$$

Or pour tout $y \in \text{supp } f$, $B(x_0 - y, r) \cap \text{supp } g = \emptyset$, l'intégrale est donc nulle et l'arbitraire sur ϕ donne le résultat. $\square$

Remarque 1.2.3. En particulier, si f et g à support compact, $f * g$ est à support compact.

Définition 1.4

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \bar{A}$ et $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de fonctions intégrables. On dit que $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une approximation de l'unité en a si

1. $\lim_{\alpha \rightarrow a} \int_{\mathbb{R}^d} f_\alpha d\lambda = 1$
2. il existe $m > 0$ tel que pour tout $\alpha \in A$, $\|f_\alpha\|_1 \leq m$
3. pour tout voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^d$, $\lim_{\alpha \rightarrow a} \int_{\mathbb{R}^d \setminus V} |f_\alpha| d\lambda = 0$.

Remarque 1.2.4. En pratique, on rencontrera principalement les cas suivants $A = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$, $A =]0, 1]$ et $a = 0$.

C'est le résultat suivant qui donne tout son sens à la terminologie.

Théorème 1.3

Soit $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une approximation de l'unité en $a \in \bar{A}$. Et soit $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ mesurable.

1. Si g est bornée et continue en x_0 , $f_\alpha * g(x_0) \rightarrow_{\alpha \rightarrow a} g(x_0)$
2. Si g est uniformément continue et bornée, $\|f_\alpha * g - g\|_\infty \rightarrow_{\alpha \rightarrow a} 0$
3. Si $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\|f_\alpha * g\|_1 \rightarrow_{\alpha \rightarrow a} 0$

Preuve. Notons $I_\alpha = \int_{\mathbb{R}^d} f_\alpha d\lambda$. Par hypothèse, $\lim_{\alpha \rightarrow a} I_\alpha = 1$. Soit V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$. La preuve de (a) est analogue à celle de (b). Prouvons cette dernière. Il suffit de montrer

que $\lim_{\alpha \rightarrow a} \|f_\alpha * g - I_\alpha g\|_\infty = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} |f_\alpha * g(x) - I_\alpha g(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_\alpha(t)g(x-t) - g(x)|dt \\ &\leq \int_V |f_\alpha(t)g(x-t) - g(x)|dt + 2\|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus V} |f_\alpha(t)|dt. \end{aligned}$$

Par uniforme continuité de g , on peut choisir V de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $t \in V$, $|g(x-t) - g(x)| \leq \varepsilon$. Alors

$$\|f_\alpha * g - g\|_\infty \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} |f_\alpha|d\lambda + 2\|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus V} |f_\alpha(t)|dt$$

le second terme dans la somme tendant vers 0 quand $\alpha \rightarrow a$.

Prouvons (c). Comme précédemment, il suffit de montrer que $\|f_\alpha * f - I_\alpha f\|_1 \rightarrow 0$. Or d'après Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned} \|f_\alpha * f - I_\alpha f\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_\alpha(t)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-t) - g(x)|dx \right) dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_\alpha(t)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\tau_t g(x) - g(x)|dx \right) dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_\alpha(t)| \mu_f(t) dt = |f_\alpha| * \check{\mu}_f(0). \end{aligned}$$

Or

$$|f_\alpha| * \check{\mu}_f(0) = \|f_\alpha\|_1 \frac{|f_\alpha|}{\|f_\alpha\|_1} * \check{\mu}_f(0)$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que la famille $\left(\frac{|f_\alpha|}{\|f_\alpha\|_1}\right)_\alpha$ est une approximation de l'unité pour α assez proche de a . Alors par (b), $\lim_{\alpha \rightarrow a} \frac{|f_\alpha|}{\|f_\alpha\|_1} * \check{\mu}_f(0) = \check{\mu}_f(0) = 0$ ce qui permet de conclure car la famille $(\|f_\alpha\|_1)_\alpha$ est bornée. $\square$

Proposition 1.2.4

Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto e^{-\pi\|x\|^2}$. La famille $\varphi_\delta : x \mapsto \frac{1}{\delta^d} \varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)$ est une approximation de l'unité.

Preuve. Un calcul classique et à savoir faire permet de montrer que $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\|x\|^2} dx = 1$. La formule du changement de variable donne que pour $\delta > 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\delta(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx$. Soit V voisinage de 0. La formule du changement de variable donne

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus V} \varphi_\delta(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \delta^{-1}V} |\varphi(x)| dx$$

Si on note $\psi_\delta = \mathbb{1}_{\delta^{-1}V} \varphi$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \delta^{-1}V} |\varphi(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x) - \psi_\delta(x)| dx$$

et cette dernière intégrale $\rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$ par le théorème de convergence dominée. $\square$

Remarque 1.2.5. Plus généralement, une bonne recette pour construire une approximation de l'unité est de partir d'une fonction ϕ positive d'intégrale 1 et considérer la famille $\phi_\delta : x \mapsto \frac{1}{\delta^d} \phi\left(\frac{x}{\delta}\right)$ quand $\delta \in]0, 1]$.