3.2 Théorie de Plancherel

Le principe est d'utiliser la densité de l'intersection $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ afin d'étendre la transformation de Fourier aux fonctions de carré intégrable.
L'intersection $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ contient l'espace des fonctions continues à support compact dont on a déjà vu qu'il est dense dans chaque $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p < \infty$.
Le point clé est le lemme suivant.

Lemme 3.1

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $||\hat{f}||_2 = ||f||_2$

Preuve. $||f||_2^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(t)\bar{f}(t)dt = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\tilde{f}(-t)dt = f * \tilde{f}(0)$ et comme $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f * \tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{f * \tilde{f}} = \hat{f} \cdot \hat{\tilde{f}}$ et bien défini et vaut $= \hat{f} \cdot \bar{\hat{f}} = |f|^2$. Puisque $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f * \tilde{f}$ est continue et bornée donc par la proposition **??**

$$f * \tilde{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f * \tilde{f}}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = ||\hat{f}||_2^2$$

ce qu'on voulait démontrer. □

Proposition 3.2.1

Il existe une unique isométrie $\wp : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ qui coïncide avec $\mathscr{F}$ sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$

Preuve. D'après le lemme si $(f_n)_n$ est une suite d'éléments de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d$ qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, la suite $(\hat{f}_n)_n$ est une suite convergente de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Si deux telles suites $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ convergent vers la même limite $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors les suites $(\hat{f}_n)_n$ et $(g_n)_n$ convergent aussi vers la même limite. En effet

$$||\hat{f}_n - \hat{g}_n||_2 = ||f_n - g_n||_2 \to_{n\to\infty} 0$$

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Il existe une suite $(f_n)_n$ de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers f. On pose $\wp(f) = \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n$. D'après ce qu'on vient de voir $\wp$ est bien définie et par construction, c'est une isométrie qui coïncide avec $\mathscr{F}$ sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. □

Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on retrouve pour $\wp(f)$ les propriétés élémentaires déjà vue dans le cas $L^1(\mathbb{R}^d)$, c'est l'objet de la propriété ci -dessous.

Mise en garde ! Il faut néanmoins prendre garde que les égalités ci-dessous sont des égalités *dans* L^2. En effet, si, dans le cas d'une fonction f intégrable, $\hat{f}$ est une fonction continue, pour une fonction g de carré intégrable mais non intégrable, $\wp(g)$ n'a plus aucune raison d'être continue.

Propriété 3.2.1

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

1. $||\widehat{\wp(f)} - \wp(f)||_2 = 0$.
2. $||\wp(\bar{f}) - \widetilde{\wp(f)}||_2 = 0$ *et* $||\wp(\tilde{f}) - \overline{\wp(f)}||_2 = 0$.
3. *Pour* $u \in GL_d(\mathbb{R})$, $||\wp(f \circ u) - |\det u^{-1}|\wp(f) \circ {}^t u^{-1}||_2 = 0$.
4. *Soit* $a \in \mathbb{R}^d$. *Rappelons que* $e_a : x \mapsto e^{2i\pi\langle a,x\rangle}$ *et* $\tau_a f : x \mapsto f(x-a)$.
   Alors $||\wp(\tau_a f) - e_a \cdot \wp(f)||_2 = 0$ *et* $||\wp(e_{-a} f) - \tau_a \wp(f)||_2 = 0$.

Preuve. 1. et 2. sont laissées en exercice.
Soit $(f_n)_n$ une suite de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.
3. Notons $(*) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \left|\wp(f) \circ {}^t u |\det u^{-1}| - \wp(f \circ u)\right|^2 d\lambda$.
Puisque $\wp(f_n) \circ {}^t u^{-1} |\det u^{-1}| = \wp(f_n \circ u)$ on peut écrire

$$(*) \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\wp(f) \circ {}^t u) - \wp(f_n) \circ {}^t u|^2 |\det u^{-1}|^2 d\lambda + \int_{\mathbb{R}^d} |\wp(f \circ u) - \wp(f_n \circ u)|^2 d\lambda$$

et la formule du changement de variable donne

$$(*) = 2|\det u^{-1}| \int_{\mathbb{R}^d} |\wp(f) - \wp(f_n)|^2 d\lambda = 2|\det u^{-1}| \cdot ||f - f_n||^2$$

4. Notons $(*) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\wp(\tau_a f) - e_a \cdot \wp(f)|^2 d\lambda$. Puisque $\wp(\tau_a f_n) = e_a \wp(f_n)$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
(*) &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\wp(\tau_a f) - \wp(\tau_a f_n)|^2 d\lambda + \int_{\mathbb{R}^d} |e_a \wp(f_n) - e_a \wp(f)|^2 d\lambda \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\tau_a f - \tau_a f_n)|^2 d\lambda + \int_{\mathbb{R}^d} |\wp(f_n) - \wp(f)|^2 d\lambda \\
&\leq ||\tau_a f - \tau_a f_n)||_2^2 + ||\wp(f_n) - \wp(f)||_2^2 = 2||f - f_n||_2^2
\end{aligned}$$

La deuxième propriété se vérifie de manière analogue. □

Proposition 3.2.2 (Formule de réciprocité dans $L^2(\mathbb{R}^d)$)

Soit f, g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \wp(g) d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \wp(f) g d\lambda$$

Preuve. L'inégalité de Hölder justifie que ces intégrales sont bien définies. Soit $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ des suites de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ convergeant respectivement vers f et$g$.

$$\begin{aligned}
||f\wp(g) - \wp(f)g||_1 \leq ||f\wp(g) - f\hat{g}_n||_1 + ||f\hat{g}_n - f_n\hat{g}_n||_1 \\
+ ||\hat{f}_n g_n - \wp(f)g_n||_1 + ||\wp(f)g_n - \wp(f)g||_1
\end{aligned}$$

D'où, toujours par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
||f\wp(g) - \wp(f)g||_1 \leq ||f||_2||\wp(g) - \hat{g}_n||_2 + ||f - \hat{f}_n||_2||\hat{g}_n||_2 \\
+ ||\hat{f}_n - \wp(f)||_2||g_n||_2 + ||\wp(f)||_2||g_n - g||_2
\end{aligned}$$

et le membre de droite tend 0 quand $n \to \infty$. □

On peut enfin énoncer et prouver le résultat principal de cette partie

Théorème de Plancherel

La transformée $\wp$ est surjective. De plus, pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $||\wp^2(f) - \check{g}||_2 = 0$.

Esquisse de preuve. Montrons que $\wp$ est surjective. Montrons que $\overline{\mathrm{Im}\,\wp}^{\perp} = \{0\}$.
• $\mathrm{Im}\,\wp$ est fermée. : Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $\mathrm{Im}\,\wp$ et soit f sa limite dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Puisque $\wp$ est une isométrie, la suite $(\wp^{-1}(f_n))_n$ est de Cauchy donc converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, notons g sa limite. Alors $f = \wp(g)$.
• $\overline{\mathrm{Im}\,\wp}^{\perp} = \mathrm{Im}\,\wp^{\perp}$. Soit $g \in \mathrm{Im}\,\wp^{\perp}$. Alors

$$
\begin{aligned}
&\langle g, \mathrm{Im}\,(f)\rangle = 0, \text{ pour toute } f \in L^2(\mathbb{R}^d),\\
\iff &\langle g, \wp(f)\rangle = 0, \text{ pour toute } f \in L^2(\mathbb{R}^d),\\
\iff &\langle g, \wp(\tilde{f})\rangle = 0, \text{ pour toute } f \in L^2(\mathbb{R}^d),\\
\iff &\int_{\mathbb{R}^d} g\overline{\wp(\tilde{f})}d\lambda, \text{ pour toute } f \in L^2(\mathbb{R}^d),\\
\iff &\int_{\mathbb{R}^d} g\wp(f)d\lambda, \text{ pour toute } f \in L^2(\mathbb{R}^d),\\
\iff &\int_{\mathbb{R}^d} \wp(g)fd\lambda, \text{ pour toute } f \in L^2(\mathbb{R}^d),
\end{aligned}
$$

ce qui signifie que $\wp(g) = 0$, et donc que $g = 0$.
Nous laissons la formule d'inversion en exercice : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$h_n : \xi \mapsto \hat{f}(\xi)e^{-\pi\frac{||\xi||^2}{n^2}} = \hat{f}(\xi)\varphi(\tfrac{\xi}{n}).$$

1. Vérifier que pour tout n, $h_n \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.
2. Justifier que $\lim_{n\to\infty} ||h_n - \hat{f}||_2 = 0$.
3. Vérifier que $\lim_{n\to\infty} ||\hat{h}_n - \check{f}||_1 = 0$.
4. En déduire la formule d'inversion dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Indication pour le 4. Penser à extraire des sous suites convergeant presque partout. □