

Chapitre 3

Transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^d$

On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues de limite nulle en l'infini. Cet espace contient en particulier l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à support compact et l'espace $\mathcal{D}$. Sauf mention explicite du contraire, l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ sera muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

3.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Dans toute cette partie, les fonctions considérées sont supposées intégrables.

3.1.1 Définition et premières propriétés

Pour $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi\langle x, \xi \rangle} dx$ est convergente du fait de l'intégrabilité de f . Ceci justifie la définition suivante.

Définition 3.1

La transformée de Fourier de f est l'application $\hat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi\langle x, \xi \rangle} dx$ définie sur $\mathbb{R}^d$ et à valeurs complexes.

Remarque 3.1.1. D'autres conventions peuvent être adoptées pour définir la transformée de Fourier. On peut ainsi trouver

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx \quad \text{ou} \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi\langle x, \xi \rangle} dx.$$

Ceci ne change fondamentalement rien à la théorie et aux divers résultats de ce chapitre, à l'exception de certaines constantes (puissances de 2π) qui peuvent apparaître.

Exemple 3.1.1. Prenons $d = 1$ et $f := \mathbb{1}_{[-\alpha, \alpha]}$; $\hat{f}(\xi) = \frac{\sin 2\pi\xi\alpha}{\pi\xi}$.

Propriété 3.1.1

La fonction $\hat{f}$ est continue, bornée par $\|f\|_1$ et de limite nulle quand $\|\xi\| \rightarrow \infty$.

Preuve. Le caractère borné est immédiat par définition. La continuité découle du théorème de continuité sous $\int$. La limite en l'infini vient du lemme de Riemann-Lebesgue. $\square$

Exemple 3.1.2 (Exemple fondamental : la fonction de Gauß). Prenons $d = 1$. Soit $\varphi : x \mapsto e^{-\pi x^2}$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2 - 2i\pi \xi x} dx.$$

Le théorème de dérivation sous $\int$ permet de montrer que $\hat{\varphi}$ est dérivable et que

$$\hat{\varphi}'(\xi) = -2\pi \xi \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2 - 2i\pi \xi x} dx = -2\pi \xi \hat{\varphi}(\xi).$$

Donc $\hat{\varphi}$ est solution de l'équation différentielle $y'(t) = 2\pi t y(t)$, équation linéaire d'ordre 1 dont l'espace des solutions est engendré par φ^1 ; ainsi $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(0)\varphi = \varphi$ car il est bien connu que l'intégrale de φ vaut 1².

Définition 3.2

L'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est appelée transformée de Fourier.

Proposition 3.1.1

L'application $\mathcal{F} : (L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$ est une application linéaire continue de norme 1.

Preuve. La linéarité vient de celle de l'intégrale ; la continuité découle de la propriété précédente : on voit en effet que $\|\mathcal{F}\| \leq 1$. L'égalité est donnée par l'exemple de la fonction de Gauß car $\|\varphi\|_\infty = 1 = \|\varphi\|_1$. $\square$

Notation. Pour $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$.

- $\check{f} : x \mapsto f(-x)$
- $\tilde{f} = x \mapsto \overline{f(-x)} = \overline{\check{f}}(x) = \check{\tilde{f}}(x)$

Les propriétés suivantes ne demandent que de simples vérifications calculatoires laissées au lecteur.

Propriété 3.1.2 (Propriétés élémentaires de $\hat{f}$)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

1. $\widehat{\check{f}} = \tilde{f}$.
2. $\widehat{\tilde{f}} = \check{f}$ et $\widehat{\tilde{\tilde{f}}} = \tilde{f}$.
3. Pour $u \in GL_d(\mathbb{R})$, $\widehat{f \circ u} = |\det u^{-1}| \hat{f} \circ {}^t u^{-1}$.
4. Soit $a \in \mathbb{R}^d$. Rappelons que $e_a : x \mapsto e^{2i\pi \langle a, x \rangle}$ et $\tau_a f : x \mapsto f(x - a)$.
Alors $\widehat{\tau_a f} = e_a \cdot \hat{f}$ et $\widehat{e_{-a} f} = \tau_a \hat{f}$.

Le théorème de Fubini permet aussi de prouver le résultat suivant :

Propriété 3.1.3

Soit $f : x = (x_1, \dots, x_d) \mapsto \prod_{k=1}^d f_k(x_k)$ où, pour $1 \leq k \leq d$, $f_k \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} : \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \mapsto \prod_{k=1}^d \hat{f}_k(\xi_k)$.

1. Rappelons par acquis de conscience que l'espace des solutions d'une équation linéaire d'ordre $k \in \mathbb{N}$ est un espace vectoriel de dimension k . Et pour cette équation-ci, il est assez évident que φ est solution...

2. Il existe plusieurs méthodes pour calculer cette intégrale, il est recommandé à tout étudiant de Master d'en connaître au moins une.

3.1. Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Exemple 3.1.3 (Exemple fondamental 2 : La fonction de Gauß dans $\mathbb{R}^d$). Posons $\varphi : x \mapsto e^{-\pi\|x\|^2}$. Alors $\hat{\varphi} = \varphi$.

Proposition 3.1.2

*La transformée de Fourier $\mathcal{F} : (L^1(\mathbb{R}^d), +, *, \times) \rightarrow (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d), +, \cdot, \times)$ est un morphisme d'algèbres de Banach.*

Remarque 3.1.2. Rappelons en effet que l'espace $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$ est complet et que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ en est un sous-espace fermé.

Preuve. La seule chose restant à vérifier est le comportement de $\mathcal{F}$ sur les produits internes, autrement dit, que $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$. C'est une conséquence du théorème de Fubini. $\square$

Corollaire 3.1.1

L'algèbre $L^1(\mathbb{R}^d)$ n'est pas unitaire.

Preuve. Raisonnons par contradiction et supposons qu'elle a une unité f . Alors, pour tout ξ ,

$$\varphi(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi * f}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{\varphi}(\xi) = \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)$$

où φ désigne bien sûr la fonction de Gauß. Comme pour tout ξ , $\varphi(\xi) > 0$, ceci impose que $\hat{f}$ est constante égale à 1, ce qui est impossible. $\square$

3.1.2 Formule de réciprocité

Proposition 3.1.3 (Formule de réciprocité)

Soit f et g intégrables. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\hat{g}d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}gd\lambda.$$

Preuve. C'est une application du théorème de Fubini. Remarquons d'abord que

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\hat{f}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-2i\pi\langle x,y\rangle}dy\right)dx.$$

D'après Fubini-Tonelli :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)f(y)e^{-2i\pi\langle x,y\rangle}|dxdy = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|dx \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|dy = \|g\|_1 \cdot \|f\|_1 < \infty$$

donc d'après Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\hat{f}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x)e^{-2i\pi\langle x,y\rangle}dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\hat{g}(y)dy.$$

$\square$

Rappelons que pour $\delta > 0$, et $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, on note $\phi_\delta : x \mapsto \frac{1}{\delta^d} \phi(\frac{x}{\delta})$.

Lemme qui fait tout marcher (QFTM)

lemme inversion Soit f, g intégrables et $a \in \mathbb{R}^d$. Supposons $\hat{g}$ intégrable. Alors

$$f * \widetilde{\mathcal{F}(g)}_\delta(a) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) g(\delta\xi) e^{2i\pi\langle \xi, a \rangle} d\xi.$$

Preuve. La preuve utilise presque toutes les propriétés élémentaires de la transformée de Fourier d'une fonction :

$$\begin{aligned} f * \widetilde{\mathcal{F}(g)}_\delta(a) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \widetilde{\mathcal{F}(g)}_\delta(a - \xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \hat{g}\left(\frac{\xi - a}{\delta}\right) \frac{1}{\delta^d} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g} \circ {}^t u^{-1}(\xi - a) \det u^{-1} d\xi \quad \text{où } u = x \mapsto \delta x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \widehat{g \circ u}(\xi - a) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \tau_a \widehat{g \circ u}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \hat{h}(\xi) d\xi \quad \text{où } h : x \mapsto e^{2i\pi\langle x, a \rangle} g \circ u(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) h(\xi) d\xi \quad \text{par la formule de réciprocity} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) g(\delta\xi) e^{2i\pi\langle \xi, a \rangle} d\xi. \end{aligned}$$

ce qu'on voulait démontrer. □

Le lemme QFTM va être utilisé pour prouver deux résultats très importants de la théorie L^1 : l'injectivité de la transformée de Fourier ci-dessous et et l'inversion à la section suivante. Pour cela, on va l'appliquer à la fonction de Gauß φ .

Puisque $\mathcal{F}(\varphi) = \varphi$ et que φ est paire, $\widetilde{\mathcal{F}(\varphi)} = \varphi$. Rappelons de plus que la famille $(\varphi_\delta)_{\delta \in]0,1]}$ est une approximation de l'unité en 0.

Théorème 3.1

L'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est injective.

Preuve. Soit $f \in \ker \mathcal{F}$. Le lemme avec $g = \varphi$ donne $f * \varphi_\delta(a) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \varphi(\delta\xi) e^{2i\pi\langle \xi, a \rangle} d\xi = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}^d$. Or $\|f * \varphi_\delta - h\|_1 \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$, donc $\|f\|_1 = 0$. □

3.1.3 Inversion

Théorème 3.2 (Inversion dans $L^1(\mathbb{R}^d)$)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\mathcal{F}^2(f) = \check{f}$ presque partout.

3.1. Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Preuve. Soit une telle f . Puisque $\|f * \varphi_\delta - f\|_1 \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$, il existe un ensemble B de mesure nulle et une suite $(\delta_n)_n$ de limite nulle telle pour tout $a \in \mathbb{R}^d \setminus B$, $f * \varphi_{\delta_n}(a) \rightarrow f(a)$ quand $n \rightarrow \infty$. Soit $a \in \mathbb{R}^d \setminus B$. Posons $\phi_n : \xi \mapsto \hat{f}(\xi)\varphi(\delta_n\xi)e^{2i\pi\langle a, \xi \rangle}$ de sorte que

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{2i\pi\langle a, \xi \rangle}$,
- pour tout n et tout ξ , $|\phi_n(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi)|$.

Puisque $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ par hypothèse, le théorème de convergence dominée assure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\varphi(\delta_n\xi)e^{2i\pi\langle a, \xi \rangle} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{2i\pi\langle a, \xi \rangle} d\xi = \mathcal{F}(\hat{f})(-a)$$

or d'après le lemme $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\varphi(\delta_n\xi)e^{2i\pi\langle a, \xi \rangle} d\xi = \lim f * \varphi_{\delta_n}(a) = f(a)$. $\square$

Le résultat précédent est un résultat en mesure, il ne dit rien sur une éventuelle égalité entre $\check{f}$ et $\mathcal{F}^2(f)$ en un point particulier. La proposition suivante donne de tels résultats avec bien sûr des hypothèses supplémentaires.

Proposition 3.1.4

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ une fonction bornée.

1. Supposons $\hat{f}$ positive et f continue en 0. Alors $f(0) = \mathcal{F}^2(f)(0)$.
2. Supposons $\hat{f}$ intégrable et f continue en x_0 . Alors $f(x_0) = \mathcal{F}^2(f)(-x_0)$.

Preuve. La preuve repose à nouveau sur le lemme QFTM. Soit $(\delta_n)_n \in]0, 1]^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle.

1. Posons $\phi_n : \xi \mapsto \hat{f}(\xi)\varphi(\delta_n\xi)$ de sorte que
 - la suite (ϕ_n) est croissante car $\hat{f}$ est positive,
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\xi) = \hat{f}(\xi)$.

Le théorème de convergence monotone assure alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\varphi(\delta_n\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Puisque f est bornée et continue en 0, $f * \varphi_{\delta_n}(0) \rightarrow f(0)$ et le lemme permet de conclure.

2. Posons $\phi_n : \xi \mapsto \hat{f}(\xi)\varphi(\delta_n\xi)e^{2i\pi\langle x, \xi \rangle}$ de sorte que
 - pour tout n et tout ξ $|\phi_n(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi)|$ avec $\hat{f}$ intégrable par hypothèse,
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{2i\pi\langle x, \xi \rangle}$.

Le théorème de convergence dominée assure alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\varphi(\delta_n\xi)e^{2i\pi\langle x, \xi \rangle} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{2i\pi\langle x, \xi \rangle} d\xi.$$

Puisque f est bornée et continue en x , $f * \varphi_{\delta_n}(x) \rightarrow f(x)$ et le lemme permet de conclure. $\square$

3.1.4 Transformée de Fourier et dérivation

Commeçons par quelques rappels sur la dérivation de fonctions définies sur (un ouvert de) $\mathbb{R}^d$. Un élément $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ est un *multi-entier*, sa *longueur* est $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_d|$. L'ensemble $\mathbb{N}^d$ des multi-entiers est muni de l'ordre partiel $\beta \preceq \alpha$ si, pour tout k , $\beta_k \leq \alpha_k$. À un multi-indice α on associe l'opérateur de dérivation

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_d} x_d};$$

on dit que $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ si $D^\beta f$ est définie et continue pour tout $\beta \preceq \alpha$.

Ainsi, pour $m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $D^\alpha f$ est définie et continue pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq m$.

Notation. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on note X^α l'application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$X^\alpha : (x_1, \dots, x_d) \mapsto \prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j}.$$

Les deux résultats de ce cours paragraphe ne présentent pas de difficultés conceptuelles, leurs preuves se font par récurrence et utilisation des théorèmes de régularité sous $\int$, elles sont laissées en exercice.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 3.1.5

Supposons que $x \mapsto (1 + \|x\|)^k f(x)$ soit intégrable. Alors $\hat{f}$ est de classe C^k et pour tout α de longueur $\leq k$,

$$D^\alpha \hat{f}(\xi) = (-2i\pi)^{|\alpha|} \widehat{X^\alpha f}(\xi).$$

Esquisse de preuve. On raisonne par récurrence sur k .

1. Pour $k = 1$: supposons que $\int_{\mathbb{R}^d} |x_j f(x)| dx < \infty$. Montrer que $\hat{f}$ est dérivable par rapport à sa j -ème coordonnée et qu'on a

$$\partial_j \hat{f}(\xi) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}^d} x_j f(x) e^{-2i\pi \langle \xi, x \rangle} dx.$$

Vérifier que $\xi \mapsto \partial_j \hat{f}(\xi)$ est continue.

2. Si $|\alpha| \geq 1$, il existe j tel que $\alpha_j \geq 1$. On pose alors $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_d)$ tel que $\alpha'_k = \alpha_k$ pour $k \neq j$ et $\alpha'_j = \alpha_j - 1$. Ainsi $|\alpha'| = |\alpha| - 1$ et $D^\alpha = \partial_j D^{\alpha'}$ ce qui devrait permettre de rédiger la récurrence à partir du 1. ...

□

Proposition 3.1.6

Supposons que f est de classe C^k et que, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\beta| \leq k$, $D^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout β de longueur $\leq k$

$$\widehat{D^\beta f}(\xi) = (2i\pi)^{|\beta|} X^\beta(\xi) \hat{f}(\xi).$$

Esquisse de preuve. Raisonnons par récurrence sur k .

1. Supposons que f admet une dérivée partielle $\partial_j f$ telle que $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

(a) Soit f continue à support compact. Montrer que

$$(\star) \quad \widehat{\partial_j f}(\xi) = 2i\pi \xi_j \hat{f}(\xi).$$

- (b) On ne suppose plus f à support compact. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi(0) = 1$. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = f(x)\varphi(x/n)$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\partial_j f_n - \partial_j f\|_1.$$

(c) En déduire le cas général.

2. Conclure par récurrence comme dans la proposition précédente.

□