TD $n°2$: GRANDS THÉORÈMES EN DIMENSION 2

Exercice 1. 1. Prouver le **Théorème de Thalès :**

Si deux droites parallèles De et Δ' coupent deux droites sécantes en I D et D' respectivement en A, B et A', B', alors $\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{IA'}}{\overline{IB'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$.

2. Prouver la **réciproque du Théorème de Thalès :**

Si deux droites De et Δ' coupent deux droites sécantes en I D et D' respectivement en A, B et A', B', et si $\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{IA'}}{\overline{IB'}}$ alors (AA') et (BB') sont parallèles et $\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$.

Exercice 2. On veut prouver le **Théorème de Pappus :**

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites, A, B, C trois points distincst sur $\mathcal{D}$ et A', B', C' trois points distincst sur $\mathcal{D}'$ (tous distincts d'un éventuel point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$).
Alors si (AB') parallèle à $(A'B)$, et $(B'C)$ parallèle à (BC'), (AC') parallèle à $(A'C)$.

1. Tracer les deux configurations possibles.
2. Traiter le cas où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en un point I.
3. Traiter le cas où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

Exercice 3. On veut prouver le **Théorème de Desargues :**

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles non plats sans sommets communs.
Si (AB) parallèle à $(A'B')$, (BC) parallèle à $(B'C')$ et (AC) parallèle à $(A'C')$, les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont parallèles ou concourantes.

1. Tracer les deux configurations possibles.
2. Supposons (AA') et (BB') sécantes en un point I. Soit $C'' \in (IC)$ tel que $\frac{\overline{IC}}{\overline{IC''}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}}$. Montrer que $C'' = C$.
3. Supposons (AA') et (BB') parallèles. Soit C'' tel que $\vec{CC''} = \vec{AA'}$. Montrer que $C'' = C'$.

Exercice 4. On veut prouver le **Théorème de Ménélaüs :**

Soit ABC un triangle non plat et P, Q et R trois points distincs des sommets et appartennant respectivement aux droites $(BC), (CA)$ et (AB).
Alors P, Q, R sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$.

1. Supposons P, Q, R alignés. Soit Δ une droite parallèle à (PQ) passant par B et soit $B' = \Delta \cap (AC)$. Montrer que $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{QB'}}{\overline{QC}}$ et que $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB'}}$ et conclure.
2. $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$.
   (a) Montrer que (PQ) et (AB) sont sécantes.

(b) Soit $R' = (PQ) \cap (AB)$. Montrer que $\frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$.

(c) En déduire que $R = R'$ et conclure.

Exercice 5. On veut prouver le **théorème de Ceva** :

Soit ABC un triangle non plat et P, Q et R trois points distincs des sommets et appartennant respectviement aux droites $(BC), (CA)$ et (AB).

Alors les droites $(AP), (BQ)$ et (CR) sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$$

1. Supposons $(AP), (BQ)$ et (CR) parallèles. Montrer que $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$.

2. Supposons $(AP), (BQ)$ et (CR) concourantes en un point G. En utilisant le théorème de Ménélaüs, montrer que $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$.

3. Supposons $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$ et supposons que (AP) et (BQ) sont sécantes en G.

   (a) Montrer que (AB) et (CG) sont sécantes. On note $S = (AB) \cap (CG)$.

   (b) Montrer que $S = R$ et conclure.