TD $n°1$: Action de groupes, espaces et sous-espaces affines

Exercice 1. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X.

1. Montrer que le stabilisateur G_x d'un élément $x \in X$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que les orbites de l'action de G sur X forment une partition de X.

Exercice 2. Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2, ab \neq 0 \right\}$.

1. Vérifier que G est un sous-groupe de $M_2(\mathbb{R})$ et que l'application
$$A : \begin{array}{ccc} G \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (M, X) & \mapsto & MX \end{array}$$
est une action de groupe.
2. Décrire les orbites de G pour son action naturelle sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Notons G l'ensemble des applications $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

1. Décrire les orbites de l'action de G sur $\mathbb{C}$. L'action est-elle transitive ?
2. Décrire le stabilisateur de tout point. L'action est-elle libre, fidèle ?

Exercice 4.
1. Montrer que deux droites affines de $\mathbb{R}^2$ sont sécantes ou parallèles (éventuellement confondues).
2. Montrer que deux plans affines de $\mathbb{R}^3$ sont ou bien sécants le long d'une droite, ou bien parallèles (éventuellement confondus).
3. Soit P un plan affine de $\mathbb{R}^3$ et D une droite affine de $\mathbb{R}^3$. Montrer que ou bien D est faiblement parallèle à P ou bien $D \cap P$ est un singleton.

Exercice 5. Soit $D = \mathcal{D}(a, \vec{u})$ et $D' = \mathcal{D}(B, \vec{v})$ deux droites de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que D et D' sont coplanaires si et seulement si et seulement si $\overrightarrow{AB} \in \mathrm{Vect}\, \vec{u}, \vec{v}$.
2. Montrer que si D et D' non coplanaires, leur intersection est vide.

Exercice 6. Soit E un ensemble et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que si E est fini, $\mathcal{F}$ est de dimension finie égale au cardinal de E.
3. Soit $a \in E$ fixé. On note $\mathcal{F}_{a,1} := \{f \in \mathcal{F} \mid f(a) = 1\}$. Montrer que c'est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$.

4. Soit $E = \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x) + 1$. Montrer que c'est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$, déterminer un point de $\mathcal{H}$ et sa direction.

Exercice 7. On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont infiniment dérivables. Soient a, b dans $\mathbb{R}$, avec $a \neq 0$ et soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. On considère les équations différentielles suivantes :

$$ay' - by = f \quad (G) \qquad ay' - by = 0 \quad (H)$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que l'ensemble des solutions $\mathscr{S}_G$ de G est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ de direction $\mathscr{S}_H$.
3. Déterminer $\mathscr{S}_G$ pour $f : x \mapsto x^2$ et pour $f : x \mapsto e^x$.