

Chapitre 1

Fonctions, caractères et distributions

La première section pose le cadre dans lequel on travaille (l'espace $\mathbb{R}^d$ muni de sa structure euclidienne, de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue) ; les notions et résultats sont supposés connus d'où l'absence de preuve sauf pour quelques résultats peut-être moins classiques.

1.1 Fonctions mesurables et espaces L^p

L'espace $\mathbb{R}^d$ est muni de sa structure euclidienne avec $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^d x_k y_k$ et $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$, de la tribu borélienne $\mathcal{B}_d$, c'est-à-dire engendrée par les ouverts, et de la mesure de Lebesgue notée λ_d ou parfois simplement λ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la dimension de l'espace.

Les fonctions considérées sont les fonctions boréliennes à valeurs réelles ou complexes, on note $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions boréliennes $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Pour $1 \leq p < \infty$, on dit que $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ si

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\lambda < \infty.$$

et que $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ s'il existe $M > 0$ tel que $\{x \mid f(x) > M\}$ est de mesure nulle. On dit alors que M est un *majorant essentiel* de f et on note $\mathcal{M}_{ess}(f)$ l'ensemble des majorants essentiels de f ; s'il est non vide c'est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ et on note alors $\sup_{ess}(f) = \inf \mathcal{M}_{ess}(f)$.

Deux nombres $p, q \geq 1$ sont dit conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, avec la convention $1, \infty$ conjugués.

Proposition 1.1.1 (Inégalité de Hölder)

Si $p, q \geq 1$ sont conjugués, pour f et g mesurables

$$\int_{\mathbb{R}^d} |fg| d\lambda \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\lambda \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g|^q d\lambda \right)^{1/q}.$$

Remarque 1.1.1. Les termes dans l'inégalité de Hölder peuvent prendre la valeur ∞ .

Corollaire 1.1.1

Si $p, q \geq 1$ conjugués, $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d)$, alors $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

L'application définie sur $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ par $f \mapsto \sup_{ess}(f)$ est une semi-norme sur cet espace. L'inégalité de Minkowski permet de montrer que pour $1 \leq p < \infty$, l'application

$$\begin{aligned} N_p : \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\mapsto \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\lambda \right)^{1/p} \end{aligned}$$

est une semi-norme sur l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$:

Proposition 1.1.2 (Inégalité de Minkowski)

Soit $p \leq 1$ et f et g mesurables. Alors

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f + g|^p d\lambda \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\lambda \right)^{1/p} + \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g|^p d\lambda \right)^{1/p}.$$

Notons $\sim$ la relation d'équivalence définie sur $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ par $f \sim g$ si $\lambda(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$ et pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{R}^d) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) / \sim$. Pour $1 \leq p < \infty$ l'application N_p passe au quotient et définit une norme sur $L^p(\mathbb{R}^d)$ qu'on note $\|\cdot\|_p$. L'application sup_{ess} passe au quotient et définit une norme sur $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ notée $\|\cdot\|_\infty$.

D'après le théorème de Riesz-Fisher les espaces ainsi obtenus sont des espaces de Banach.

Théorème de Riesz-Fisher

Pour $1 \leq p \leq \infty$, $(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p)$ est complet. De plus, si une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $L^p(\mathbb{R}^d)$ converge vers $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, il existe un ensemble de mesure nulle B et une extration $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus B$, $f_{\psi(n)}(x) \rightarrow f(x)$.

Définition 1.1

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note $\mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des $f \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ telles que pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, $f \in \mathcal{L}^p(K)$ et $L_{\text{loc}}^p = \mathcal{L}_{\text{loc}}^p / \sim$.

Remarque 1.1.2. Pour $1 \leq p \leq \infty$, toute fonction continue est dans $\mathcal{L}_{\text{loc}}^p$.

Proposition 1.1.3 (S)

it $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors $f \in L_{\text{loc}}^1$.

La preuve de ce résultat est laissée en exercice.

1.1.1 Théorèmes de convergence

Sont seulement rappelés les énoncés des principaux théorèmes de convergence pour l'intégrale de Lebesgue. Le cadre de validité de ces théorèmes est bien évidemment plus large que celui des énoncés où nous nous limitons à des fonctions définies sur (des boréliens de) $\mathbb{R}^d$.

Théorème de convergence monotone

Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers une fonction f . Alors f est mesurable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda.$$

Théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers une fonction mesurable f . Supposons qu'il existe une fonction g intégrable telle que pour tout n et pour **presque tout** x , $|f_n(x)| \leq |g(x)|$. Alors f est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda.$$

Théorème de continuité sous $\int$

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : O \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$. Soit $\xi_0 \in O$. Supposons que

- pour tout $\xi \in \mathbb{R}^m$, $x \mapsto f(\xi, x)$ est mesurable,
- pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\xi \mapsto f(\xi, x)$ est continue en ξ_0 ,
- il existe $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ intégrable telle que pour tout $\xi \in O$ et pour presque tout x , $|f(\xi, x)| \leq |g(x)|$.

Alors l'application $F : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi, x) d\lambda(x)$ est bien définie sur O et est continue en ξ_0 .

Théorème de dérivation sous $\int$

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : O \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$. Supposons que

- pour tout $\xi \in \mathbb{R}^m$, $x \mapsto f(\xi, x)$ est intégrable,
- pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\xi \mapsto f(\xi, x)$ est de classe C^1 ,
- il existe $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ intégrable telle que pour tout $\xi \in O$ et pour presque tout x , $|f(\xi, x)| \leq |g(x)|$.

Alors l'application $F : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi, x) d\lambda(x)$ est de classe C^1 et pour $\xi \in O$,

$$dF(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, x) d\lambda(x).$$

1.1.2 Théorème de Fubini-Tonelli

Le théorème de Fubini-Tonelli est, avec le théorème de convergence dominée, l'un des résultats les plus utilisés en intégration. Le cœur du résultat réside en l'existence et l'unicité pour deux espaces mesurés σ -finis $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{M}, \nu)$ d'une mesure « naturelle » sur l'espace produit $X \times Y$ (si on a peur des espaces mesurés abstraits et des mesures σ -finies, on peut simplement penser que X et Y sont des boréliens d'espaces euclidiens).

Rappelons d'abord que la *tribu produit* sur $X \times Y$ est la tribu notée $\mathcal{T} \otimes \mathcal{M}$ engendrée par les produits $A \times B$ pour $A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{M}$. Par « naturelle » on entend une mesure $\mathbf{m}$ telle que pour $(A, B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{M}$,

$$\mathbf{m}(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

L'hypothèse sur $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{M}, \nu)$ d'être σ -finis permet de montrer qu'une telle mesure est unique, une construction basée sur des raisonnements purement ensemblistes assurant par ailleurs son existence.

Notons qu'on a déjà rencontré de telles mesures dans ce texte : la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$ est précisément la tribu produit¹ :

$$\mathcal{B}_d = \bigotimes_{k=1}^d \mathcal{B}_1$$

et la mesure de Lebesgue λ_d sur $\mathcal{B}_d$ est la mesure produit

$$\lambda_d = \bigotimes_{k=1}^d \lambda_1.$$

1. Attention, ceci n'est plus vrai si on considère non pas les tribus boréliennes mais les tribus de Lebesgue : la tribu de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$ n'est pas le produit des tribus de Lebesgue de $\mathbb{R}^1$ mais sa complétée.

Considérons $(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{M}, \nu)$ deux espaces mesurés σ -finis.

On munit l'espace $X \times Y$ de la tribu produit $\mathcal{T} \otimes \mathcal{M}$ et de la mesure produit notée $\mu \otimes \nu$. Pour $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction mesurable, $x \in X$ et $y \in Y$, on pose :

- $f_{x\bullet} : Y \rightarrow \mathbb{K} : y \mapsto f(x, y)$,
- $f_{\bullet y} : X \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto f(x, y)$.

Théorème de Fubini-Tonelli

Soit $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable.

1. Pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$, les fonctions $f_{x\bullet}$ et $f_{\bullet y}$ sont mesurables

On définit alors les fonctions $\varphi : X \rightarrow [0, +\infty]$ et $\psi : Y \rightarrow [0, +\infty]$ par

$$\varphi(x) = \int_Y f_{x\bullet}(y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$$

$$\psi(y) = \int_X f_{\bullet y}(x) d\mu(x) = \int_X f(x, y) d\mu(x).$$

2. Les fonctions φ et ψ sont mesurables respectivement pour μ et ν et

$$\int_X \int_Y \psi(y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \nu(x, y) = \int_Y \int_X \varphi(x) d\mu(x) d\nu(y)$$

ce qui s'écrit aussi

$$\int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \nu(x, y) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y).$$

Théorème de Fubini

Soit $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction intégrable.

1. Pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$, les fonctions $f_{x\bullet}$ et $f_{\bullet y}$ sont mesurables

2. Pour presque tout $x \in X$ et presque tout $y \in Y$, les quantités

$$\varphi(x) = \int_Y f_{x\bullet}(y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$$

$$\psi(y) = \int_X f_{\bullet y}(x) d\mu(x) = \int_X f(x, y) d\mu(x).$$

sont bien définies.

3. Les fonctions φ et ψ sont intégrables respectivement pour μ et ν et

$$\int_X \left(\int_Y \psi(y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \nu(x, y) = \int_Y \left(\int_X \varphi(x) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

ce qui s'écrit aussi

$$\int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \nu(x, y) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y).$$

1.1.3 Support d'une fonction

Définition 1.2

Le support d'une fonction borélienne f est le complémentaire du plus grand ouvert (pour l'inclusion) sur lequel la fonction s'annule presque partout, on le note $\text{supp } f$.

Remarque 1.1.3. Cette définition a un sens car $\mathbb{R}^d$ est à base dénombrable d'ouverts. En effet, une union quelconque d'ouverts est alors une union *dénombrable d'ouverts* et, puisque une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle reste de mesure nulle, si O est la réunion de tous les ouverts sur lesquels f s'annule presque partout, f s'annule presque partout sur O .

Propriété 1.1.1

Si f est continue, $\text{supp } f = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$.

Proposition 1.1.4

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ les assertions suivantes sont équivalentes

- i) $x \notin \text{supp } f$
- ii) Il existe $r > 0$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support dans $\overline{B(x, r)}$, $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi f d\lambda = 0$.

La preuve repose sur les résultats suivants intéressants en eux-mêmes.

Lemme 1.1

Soit $f \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ à valeurs positive et soit $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugués.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} f^p d\lambda \right)^{1/p} = \sup_{\substack{g \geq 0 \\ \|g\|_q \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^d} f g d\lambda.$$

Preuve. Montrons le résultat pour $p < \infty$, le cas $p = \infty$ est laissé en exercice. D'après l'inégalité de Hölder, pour tout $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d)$ positive telle que $\|g\|_q \leq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f g d\lambda \leq \|g\|_q \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \right)^{1/p}.$$

Pour montrer la réciproque, on construit d'abord une suite de fonction $(f_n)_n$ de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ qui converge simplement vers f . Ceci se fait grâce au théorème de convergence monotone en posant $X_n = [-n, n]^d \cap \{x \mid f(x) \leq n\}$ et $f_n = \mathbf{1}_{X_n} f$. On construit alors une suite $(g_n)_n$ telle que

- $\|g_n\|_q = 1$
- $\int g_n f = \|f_n\|_p$

En effet, supposons la suite g_n ainsi construite. Alors

$$\sup_{\substack{g \geq 0 \\ \|g\|_q = 1}} \int f g \geq \sup_n \int f g_n = \sup_n \|f_n\|_p = \left(\int f^p \right)^{1/p}.$$

ce qui permet de conclure. On vérifie que la suite $g_n := \frac{f_n^{p-1}}{\|f_n\|_p^{p-1}}$ convient car $q(p-1) = p$. $\square$

Corollaire 1.1.2

Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_q=1} \left| \int f g d\lambda \right|.$$

Preuve. Comme précédemment on ne montre que le cas $p < \infty$, l'autre étant laissé en exercice. Comme précédemment, l'inégalité $\|f\|_p \leq \sup_{\|g\|_q=1} \left| \int f g \right|$ découle de celle de Hölder. Pour montrer l'inégalité inverse, considérons une fonction g positive et posons $\tilde{g} = \frac{f}{|f|}g$ de sorte que $\tilde{g}f = |f|g$ est une fonction positive. Alors

$$\sup_{\|g\|_q=1} \left| \int f g d\lambda \right| \geq \sup_{\substack{g \geq 0 \\ \|g\|_q=1}} \left| \int f \tilde{g} d\lambda \right| \geq \sup_{\substack{g \geq 0 \\ \|g\|_q=1}} \int |f| \tilde{g} d\lambda = \|f\|_p$$

la dernière égalité découlant du lemme. $\square$

Preuve de la proposition proposition 1.1.4. Si $x \notin \text{supp } f$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \text{supp } f^c$, donc la restriction de f à $B(x, r)$ est presque partout nulle et ii) est alors vérifiée. D'après le corollaire, $\|f|_{B(x, r)}\|_1 = \sup_{\|\varphi\|_\infty=1} \left| \int f \varphi d\lambda \right| = 0$ et i) est vérifiée. $\square$

1.1.4 Théorème de Lusin et premiers résultats de densité

Rappelons qu'une fonction étagée est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de boréliens de mesure finie. L'espace des fonctions étagées est noté $\mathcal{E}$.

Théorème 1.1

Pour $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{E}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. Rappelons que toute fonction mesurable positive f est limite simple d'une suite croissante $(f_n)_n$ de fonctions étagées. Alors $0 \leq (f - f_n)^p \leq f^p$ et le théorème de convergence dominée permet de conclure. Pour une fonction à valeurs réelles, on raisonne sur ses parties positive $f^+ : \max(f, 0)$ et négative $f^- = \max(-f, 0)$. Pour une fonction à valeurs complexes, on raisonne sur ses parties réelle et imaginaire. $\square$

Remarque 1.1.4. Le résultat est faux dans L^∞ : soit $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1. Pour toute $f \in \mathcal{E}$, $\|f - \mathbf{1}\|_\infty \geq 1$. En effet, si $f \in \mathcal{E}$, $f = \sum_{i \in F} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ où F est un ensemble fini et A_i est de mesure finie. Alors $\lambda(\mathbb{R}^d \setminus (\cup_{i \in F} A_i)) = +\infty$ et sur cet ensemble $|f - \mathbf{1}| \equiv 1$.

Théorème de Lusin

Soit $\Omega \in \mathcal{B}_d(\mathbb{R})$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction borélienne telle que $\lambda(\{x \mid f(x) \neq 0\}) < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ continue à support compact telle que

- $\lambda(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$,
- $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

L'espace des fonctions continues à support compact est noté $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$. Cet espace est contenu dans tout $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq p \leq \infty$.

Corollaire 1.1.3

Pour $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. En vertu du théorème 1.1, il suffit de montrer que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{E}$. Soit $h \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Lusin, il existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\lambda(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) \leq \varepsilon$ et $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Alors $\int_{\mathbb{R}^d} |h - g|^p d\lambda \leq 2\varepsilon \|h\|_\infty^p$. $\square$

Remarque 1.1.5. Comme précédemment, le résultat est faux dans L^∞ et le contreexemple est le même : si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, $\|f - 1\|_\infty \geq 1$. En effet, si $K = \text{supp } f$, $\lambda(\mathbb{R}^d \setminus K) = +\infty$ et sur cet ensemble $|f - 1| \equiv 1$.

1.1.5 Esquisse de preuve du théorème de Lusin

Ci-dessous un schéma de preuve sous forme d'exercice que le lecteur est vivement encouragé à chercher. On rappelle quelques résultats utiles de topologie et théorie de la mesure.

Régularité de la mesure de Lebesgue : Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ mesurable tel que $\lambda(A) < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \subset \mathbb{R}^d$ compact et $O \subset \mathbb{R}$ ouvert tels que

$$K \subset A \subset O, \quad \text{et} \quad \lambda(O \setminus K) \leq \varepsilon.$$

Lemme d'Urysohn : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $K \subset U$ un compact. Il existe une fonction continue $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ telle que $f \equiv 1$ sur K et $f \equiv 0$ sur le complémentaire de U .

Existence de voisinage compact d'un compact : Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et U un ouvert contenant K . Il existe $V \subset U$ ouvert contenant K tel que $\bar{V} \subset U$ et $\bar{V}$ compact.

Soit Ω un borélien de $\mathbb{R}^d$ et $h : \Omega \rightarrow [0, 1]$ mesurable. Le but de cet exercice est de montrer l'existence d'une suite de parties mesurables $(A_n)_{n \geq 1}$ tels que $h = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{A_n}$. On pose $g_0 \equiv 0$, $A_1 := \{x \mid f(x) \geq \frac{1}{2}\}$. On considère les suites g_n et A_n définies par

$$\begin{cases} A_n = \{x \mid h(x) \geq g_{n-1}(x) + \frac{1}{2^n}\} \\ g_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \mathbf{1}_{A_k}. \end{cases}$$

1. Tracer g_1, g_2 et g_3 pour $h : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, $x \mapsto \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ 1 - x, & x \geq 0 \end{cases}$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \Omega$, $g_n(x) \leq f(x) \leq g_n(x) + \frac{1}{2^n}$ et conclure.

Soit maintenant $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable telle que $\lambda(\{x \mid f(x) \neq 0\}) < \infty$. On note $A := \{x \mid f(x) \neq 0\}$.

3. On suppose A compact et f à valeurs dans $[0, 1]$.

(a) On fixe $\varepsilon > 0$. On définit les ensembles A_n comme dans l'exercice 1. Montrer qu'il existe une suite $(K_n)_{n \geq 1}$ de compacts et une suite $(V_n)_{n \geq 1}$ d'ouverts relativement compacts tels que $K_n \subset A_n \subset V_n$ et $\lambda(V_n \setminus K_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$.

(b) En déduire pour tout $\varepsilon > 0$ l'existence de $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ telle que $\lambda(\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}) \leq \varepsilon$.

(c) Étendre le résultat pour f à valeurs dans $[0, 1]$ sans supposer A compact.

- (d) Étendre le résultat pour f à valeurs positives, puis pour f à valeurs complexes.
- (e) En considérant l'application $\zeta : x \mapsto \begin{cases} x, & \text{si } x \leq \|f\|_\infty \\ \frac{x\|f\|_\infty}{\|x\|}, & \text{si } x \geq \|f\|_\infty. \end{cases}$ montrer qu'on peut de plus choisir g telle que $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.
- (f) En déduire la version plus faible suivante du théorème de Lusin : On pourra considérer séparément le cas Ω compact du cas Ω non compact.

1.1.6 Action de $\mathbb{R}^d$ et lemme de Riemann-Lebesgue

Le groupe abélien $\mathbb{R}^d$ agit sur les espaces L^p de la manière suivante : pour $a \in \mathbb{R}^d$ et $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$, on note $\tau_a f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto f(x - a)$. L'invariance de la mesure de Lebesgue par translation montre que pour $p \in [1, \infty[$, on a les équivalences suivantes

$$f \in L^p(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^d, \tau_a f \in L^p(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}^d, \tau_a f \in L^p(\mathbb{R}^d)$$

On vérifie facilement d'autre part que

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^d, \tau_a f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}^d, \tau_a f \in L^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Considérons les applications

$$\begin{array}{ccc} \psi_f : \mathbb{R}^d & \rightarrow & L^1(\mathbb{R}^d) \\ a & \rightarrow & \tau_a f \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mu_f : \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ a & \rightarrow & \|\tau_a f - f\|_1. \end{array}$$

Proposition 1.1.5

Les applications ψ_f et μ_f sont uniformément continues.

Preuve. Remarquons que pour $a, h \in \mathbb{R}^d$

$$\|\psi_f(a + h) - \psi_f(a)\|_1 = \|\tau_h(\tau_a f - f)\|_1 = \|\tau_h(f) - f\|_1 = \|\psi_f(h) - \psi_f(0)\|_1$$

et la continuité de ψ_f en 0 garantit alors son uniforme continuité.

Commençons par montrer résultat pour $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité de g , il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $\|h\| \leq \eta$, $|g(x + h) - g(x)| \leq \varepsilon$. D'où $\|\psi_g(h) - \psi_g(0)\|_1 \leq C\varepsilon$ où C est la mesure du support de g et ne dépend pas de ε . Soit maintenant $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$. Alors

$$\|\psi_f(h) - \psi_f(0)\|_1 \leq \|\psi_f(h) - \psi_g(h)\|_1 + \|\psi_g(h) - \psi_g(0)\|_1 + \|\psi_g(h) - \psi_f(0)\|_1$$

ce qui permet de conclure.

Remarquons que μ_f est continue comme composée de ψ_f avec $g \mapsto g - f$ et $h \mapsto \|h\|_1$. De plus pour a, h dans $\mathbb{R}^d$

$$|\mu_f(a+h) - \mu_f(a)| = | \|\tau_{a+h} f - f\|_1 - \|\tau_a f - f\|_1 | \leq | \|\tau_{a+h} f - \tau_a f\|_1 | = \|\tau_h f - f\|_1 = |\mu_f(h) - \mu_f(0)|$$

ce qui donne l'uniforme continuité. $\square$

Lemme de Riemann-Lebesgue

Pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\langle x, \xi \rangle} dx = 0.$$

1.1. Fonctions mesurables et espaces L^p

Preuve. Posons $h : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\langle x, \xi \rangle} dx$.

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x - \frac{\pi \xi}{\|\xi\|^2}) e^{i\langle x, \xi \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(u) e^{i\langle u + \frac{\pi \xi}{\|\xi\|^2}, \xi \rangle} du = e^{i\pi \langle \frac{\xi}{\|\xi\|^2}, \xi \rangle} h(\xi) = -h(\xi).$$

D'où

$$h(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left(f(x) - f(x - \frac{\pi \xi}{\|\xi\|^2}) \right) e^{i\langle x, \xi \rangle} dx = \frac{1}{2} \|f - \tau_{\frac{\pi \xi}{\|\xi\|^2}} f\|_1 = \frac{1}{2} \mu_f\left(\frac{\pi \xi}{\|\xi\|^2}\right)$$

ce qui permet de conclure car $\lim_{z \rightarrow 0} \mu_f(z) = 0$. $\square$

Corollaire 1.1.4

Pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cos(\langle x, \xi \rangle) dx = 0 = \lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \sin(\langle x, \xi \rangle) dx.$$

Preuve. Écrivons $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$. D'après le lemme de Riemann-Lebesgue

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{Re} f(x) e^{i\langle x, \xi \rangle} dx = 0 = \lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{Im} f(x) e^{i\langle x, \xi \rangle} dx$$

donc

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{Re} f(x) \cos(\langle x, \xi \rangle) dx = 0 = \lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{Re} f(x) \sin(\langle x, \xi \rangle) dx$$

et

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{Im} f(x) \cos(\langle x, \xi \rangle) dx = 0 = \lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{Im} f(x) \sin(\langle x, \xi \rangle) dx$$

d'où le résultat annoncé. $\square$

Pour terminer cette section, remarquons qu'on peut définir un analogue des fonctions μ_f et ψ_f pour $f \in L^q(\mathbb{R}^d)$ avec $q < \infty$. Les fonctions obtenues sont bien définies et uniformément continues, la preuve est rigoureusement la même que pour $q = 1$. Ceci est synthétisé dans la proposition ci-dessous.

Proposition 1.1.6

Soit $q \in [1, +\infty[$ et $f \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Les applications

$$\begin{array}{ccc} \psi_f^q : \mathbb{R}^d & \rightarrow & L^q(\mathbb{R}^d) \\ a & \rightarrow & \tau_a f \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mu_f^q : \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ a & \rightarrow & \|\tau_a f - f\|_q. \end{array}$$

sont bien définies et uniformément continues.