

EXERCICES : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 2

Exercice 1. Soit $f :]a, b[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et bornée. Montrer que toute solution maximale de l'équation $y' = f(t, y)$ est globale.

Exercice 2. Pour chacun des problèmes de Cauchy suivant, vérifier l'existence et l'unicité d'une solution et dire si cette solution est globale.

$$1. \begin{cases} y' &= \sin y \\ y(1) &= 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y' &= y^4 \\ y(1) &= 1. \end{cases}$$

Exercice 3. 1. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est-elle localement lipschitzienne ?

$$2. \text{ Résoudre le problème de Cauchy } \begin{cases} y &= \sqrt{y} \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

Exercice 4. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état telle qu'il existe $g, h : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ telles que pour tout $(t, y) \in I \times \mathbb{R}^n$,

$$\|f(t, y)\| \leq g(t)\|y\| + h(t).$$

Montrer que les solutions maximales de $y' = f(t, y)$ sont globales.

Exercice 5. Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que g ne s'annule pas. Soit $f : I \times I \rightarrow \mathbb{R} : (t, y) \mapsto g(y)h(t)$. Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$.

Exercice 6. Résoudre l'équation différentielle $y't \ln t - y = 1$.

Exercice 7 (Équation de Bernoulli). Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $m \geq 2$ un entier. On considère l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)y^m$.

1. Soit $y_0 \neq 0$. Montrer qu'il existe une unique solution y telle que $y(0) = y_0$ et que cette solution n'est jamais nulle.
2. Montrer que la fonction $z = y^{1-m}$ est solution d'une équation linéaire du premier ordre que l'on déterminera.
3. En déduire y .

Exercice 8. Soit a, b deux réels strictement positifs. Soit $I \ni t \mapsto (x(t), y(t))$ la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= xy - 2x^2 \\ y' &= -xy - y^2 \\ (x(0), y(0)) &= (a, b) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $t \in I$, $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$.
2. Montrer que $[0, +\infty[\subset I$.

3. Montrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$.

Exercice 9. Soit I intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 continue telles que pour tout $t \in I$,

$$\alpha'(t) < f(t, \alpha(t)) \quad \text{et} \quad f(t, \beta(t)) < \beta'(t).$$

Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ et soit (J, y) une solution maximale du problème de Cauchy $\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$.

1. Supposons que $\alpha(t_0) \leq y_0$. Notons $A := \{t \in J \mid t \geq t_0 \text{ et } \alpha(t) > y(t)\}$ et $t_1 = \inf A$.
 - (a) Montrer que $y(t_1) = \alpha(t_1)$ puis que $\alpha'(t_1) \geq y'(t_1)$
 - (b) En déduire que A est vide.
2. Supposons que $y_0 \leq \beta(t_0)$. Montrer que pour tout $t \in J$, si $t \geq t_0$, alors $\beta(t) \geq y(t)$.
3. Supposons que f est localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état et que les hypothèses des question 1. et 2. soient satisfaites. Montrer que $J \cap [t_0, +\infty] = I \cap [t_0, +\infty]$ (*autrement dit, la solution est "globale" à droite*)

Exercice 10. Soit O ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction localement lipschitzienne. Soit (I, y) une solution maximale de l'équation autonome $y' = f(y)$. Montrer que si l'image de y est compacte, y est périodique.

Exercice 11. Considérons le système

$$\begin{cases} x' &= x + \alpha y \\ y' &= x + 2y. \end{cases}$$

À quelles conditions sur α , le point $(0, 0)$ est-il attractif?