1.3 Distributions

Pour K compact de $\mathbb{R}^d$, on note $\mathscr{D}_K := \{\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \mid \operatorname{supp}\varphi \subset K\}$. Lorsque nous avons introduit l'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, nous n'avons pas précisé sa topologie. Il se trouve que la topologie naturellement mise sur cet espace est très grosse et compliquée : elle n'est en particulier pas métrisable et nulle part à base dénombrable d'ouvert. Il est néanmoins aisé définir une notion de convergence et cette notion suffit pour ce dont nous avons besoin dans la suite du cours. Notons que quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$, l'opérateur $\partial^\alpha : f \mapsto \partial^\alpha f$ est bien défini sur $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et a fortiori sur $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Dans la suite on note $\mathscr{D}$ au lieu de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.6

On dit qu'une suite $(\varphi_n)_n$ de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ converge vers $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ si

— Il existe K compact tel que pour tout n $\varphi_n \in \mathscr{D}_K$ et $\varphi \in \mathscr{D}_K$,

— pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha\varphi_n$ converge uniformément vers $\partial^\alpha\varphi$.

Définition 1.7

Une distribution est une forme linéaire u sur $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ qui satisfait la propriété suivante : pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, il existe un entier N_K et un réel positif C_K tels que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}_K$

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq C_K \max_{|\alpha|\leq N_k} ||\partial^\alpha\varphi||_\infty$$

L'ensemble des distributions est noté $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ ou tout simplement $\mathscr{D}'$ s'il n'y a pas ambiguïté.

Proposition 1.3.1

Soit $(\varphi_n)_n \in \mathscr{D}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\varphi \in \mathscr{D}$. Pour tout $u \in \mathscr{D}'$, la suite $(\langle u, \varphi_n\rangle)_n$ converge vers $\langle u, \varphi\rangle$.

Preuve. Soit K tel que $\varphi \in \mathscr{D}_k$ et $\varphi_n \in \mathscr{D}_K$ pour tout n. Soit C_K et N_K comme dans la définition. Alors

$$|\langle u, \varphi_n\rangle - \langle u, \varphi\rangle| = |\langle u, \varphi_n - \varphi\rangle| \leq C_K \max_{|\alpha|\leq N_k} ||\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)||$$

le membre de gauche tendant vers 0 par définition de la convergence d'une suite de $\mathscr{D}$. □

La topologie sur l'espace $\mathscr{D}'$ n'est guère plus simple que celle sur $\mathscr{D}$. Néanmoins, on peut là encore donner facilement une notion de convergence qui est suffisante pour la suite.

Définition 1.8

1)On dit qu'une suite $(u_n)_n$ de $\mathscr{D}'$ converge vers $u \in \mathscr{D}'$ si pour tout $\varphi \in \mathscr{D}$, la suite $(\langle u_n, \varphi\rangle)_n$ converge vers $\langle u, \varphi\rangle$.
2) Une application $\Lambda : \mathscr{D}' \to \mathscr{D}'$ est dite séquentiellement continue si pour toute suite $(u_n)_n$ de $\mathscr{D}'$ qui converge vers u, la suite $(\Lambda(u_n))_n$ converge vers $\Lambda(u)$.

Exemple 1.3.1. $u : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx$ avec $C_K = \lambda(K)$ et $N_K = 0$

Exemple 1.3.2. Distribution de Dirac : soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On pose $\delta_{x_0} : \varphi \mapsto \varphi(x_0)$. Ici $N_K = 0$ et $C_K = \begin{cases} 0, & \text{si } x_0 \notin K \\ 1, & \text{si } x_0 \in K \end{cases}$.

Exemple 1.3.3. Prenons $d = 1$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, et $x_0 \in \mathbb{R}$, notons $\delta_{x_0}^{(m)} : \varphi \mapsto (-1)^m \varphi^{(m)}(x_0)$. Ici $N_K = m$ et $C_K = \begin{cases} 0, & \text{si } x_0 \notin K \\ 1, & \text{si } x_0 \in K \end{cases}$.

Exemple 1.3.4. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Notons $T_f : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx$. Ici $N_K = 0$ et $C_K = ||f_{|K}||_1$.

Le dernier exemple est important. Nous admettrons le résultat suivant.

Proposition 1.3.2

L'application $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d) : f \mapsto T_f$ est une application linéaire injective.

Nous admettrons aussi le résultat suivant, qui n'est pas sans rappeler le théorème de Banach-Steinhaus (mais attention, l'espace $\mathscr{D}'$ n'est pas un espace de Banach).

Théorème de la borne uniforme

Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $(u_n)_n$ une suite de $\mathscr{D}'$ telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}_K$, la suite $(\langle u_n, \varphi\rangle)_n$ converge. Alors il existe un entier p et un réel $C \geq 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\varphi \in \mathscr{D}_K$

$$|\langle u_n, \varphi\rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq p} ||\partial^\alpha \varphi||_\infty.$$

Corollaire 1.3.1

Soit $(u_n)_n$ une suite de $\mathscr{D}'$ telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}$, la suite $(\langle u_n, \varphi\rangle)_n$ converge. Alors il existe $u \in \mathscr{D}'$ telle que $(u_n)_n$ converge vers u.

Preuve. Posons $u : \varphi \mapsto \lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi\rangle$. L'application u est linéaire. Soit K un compact. D'après le théorème, il existe $C_K > 0$ et $N_K \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}_K$ et tout n

$$|\langle u_n, \varphi\rangle| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq N_K} ||\partial^\alpha \varphi||_\infty \quad (*)$$

Par passage à la limite, l'application u satisfait encore l'inégalité $(*)$. □

Opérations élémentaires sur les distributions.

Les sept propositions qui suivent ne demandent que de très simples vérifications laissées aux lecteurs.

a) Conjugaison. Pour $u \in \mathscr{D}'$, on note $\bar{u} : \varphi \mapsto \overline{\langle u, \bar{\varphi}\rangle}$.

Proposition 1.3.3

Si $f \in L^1_{loc}$, $\overline{T_f} = T_{\bar{f}}$.

Proposition 1.3.4

L'application $\mathscr{D}' \to \mathscr{D}' : u \mapsto \bar{u}$ est séquentiellement continue.

b) Symétrie. Pour $u \in \mathscr{D}'$, on note $\check{u} : \varphi \mapsto \langle u, \check{\varphi}\rangle$.

Proposition 1.3.5

Si $f \in L^1_{loc}$, $\check{T}_f = T_{\check{f}}$.

Proposition 1.3.6

L'application $\mathscr{D}' \to \mathscr{D}' : u \mapsto \check{u}$ est séquentiellement continue.

c) Dérivation. Pour $1 \leq j \leq d$, et f différentiable, on note $\partial_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j}$. Pour $u \in \mathscr{D}'$, on note alors $\partial_j u : \varphi \mapsto -\langle u, \partial_j f \rangle$.
Rappelons que toute fonction continue est dans L^1_{loc}.

Proposition 1.3.7

Si f est C^1, $\partial_j T_f = T_{\partial_j f}$.

Proposition 1.3.8 (Lemme de Schwarz pour les distributions)

Soit $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $j, k \leq d$. Alors $\partial_j \partial_k u = \partial_k \partial_j u$.

Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 1.9

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Pour $u \in \mathscr{D}'$, on note $\partial^\alpha u$ la distribution $\partial^\alpha u : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle$.

Exemple 1.3.5. Prenons $d = 1$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $\partial^m \delta_{x_0} = \partial^{(m)}_{x_0}$.

Proposition 1.3.9

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, l'application $\partial^\alpha : \mathscr{D}' \to \mathscr{D}' : u \mapsto \partial^\alpha u$ est séquentiellement continue.

Convolution par un élément de $\mathscr{D}$.

Pour $u \in \mathscr{D}'$ et $\psi \in \mathscr{D}$, on note $u * \psi : x \mapsto \langle u, \widecheck{\tau_x \psi} \rangle$. Il est important de noter ici que la convolée d'une fonction de $\mathscr{D}$ et d'une distribution est une fonction.

Exemple 1.3.6. Soit $f \in L^1_{loc}$. Alors $T_f * \psi = f * \psi$. En effet pour $t \in \mathbb{R}^d$, $\widecheck{\tau_x \psi}(t) = \check{\psi}(t - x) = \psi(x - t)$, d'où

$$T_f * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) f(x - t) dt = f * \psi(x)$$

D'après ce qu'on a vu de la convolée d'un élément de $L^1(\mathbb{R}^d)$ avec un élément de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, il s'agit ici d'une fonction de classe C^∞.

Le fait ci-dessus est en fait général :

Proposition 1.3.10

Soit $u \in \mathscr{D}'$ et $\psi \in \mathscr{D}$. Alors $u * \psi$ est de classe C^∞.

Preuve. • $u * \psi$ est continue : l'appplication $\mathbb{R}^d \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) : x \mapsto \tau_x \psi$ est séquentiellement continue. En effet soit $(x_n)_n$ une suite convergeant vers x. On peut supposer que pour tout n, $x_n \in B(x, 1)$ de sorte que si $K := \overline{\operatorname{supp} \psi - B(x, 1)}$, pour tout n $\operatorname{supp} \tau_{x_n} \psi \subset K$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$, et $k = |\alpha|$. Le théorème des accroissements finis donne

$$||\partial^\alpha \tau_x \psi - \partial^\alpha \tau_{x_n} \psi||_\infty \leq |||D(\partial^\alpha \psi)||| \cdot ||x_n - x|| \leq \max_{|\beta| = k+1} ||\partial^\beta \psi||_\infty ||x_n - x||$$

ce qui assure les convergences uniformes des dérivées partielles. Alors

$$\lim_{n\to\infty} u * \psi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \langle u, \widetilde{\tau_{x_n}\psi}\rangle = \langle u, \widetilde{\tau_x\psi}\rangle = u * \psi(x).$$

• $u * \psi$ est de classe C^1. Montrons que ses dérivées partielles existent et sont continues. Soit $(t_n)_n$ une suite de réels convergeant vers 0. Notons $e_1, \dots, e_d$ désignent ici les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned}\partial_j(u * \psi)(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\big(u * \psi(x + t_n e_j) - u * \psi(x)\big)\\ &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\big(\langle u, \widetilde{\tau_{x+t_n e_j}\psi}\rangle - \langle u, \widetilde{\tau_x\psi}\rangle\\ &\lim_{n\to\infty} \big(\langle u, \tfrac{1}{t_n}(\widetilde{\tau_{x+t_n e_j}\psi} - \widetilde{\tau_x\psi})\rangle.\end{aligned}$$

Posons $\varphi_n = \frac{1}{t_n}(\widetilde{\tau_{x+t_n e_j}\psi} - \widetilde{\tau_x\psi})$. Pour $y \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}\varphi_n(y) &= \tfrac{1}{t_n}(\widetilde{\tau_{x+t_n e_j}\psi}(y) - \widetilde{\tau_x\psi}(y))\\ &= \tfrac{1}{t_n}(\check{\psi}(y - x - t_n e_j) - \check{\psi}(y - x))\\ &= \tfrac{1}{t_n}(\psi(x + t_n e_j - y) - \check{\psi}(x - y)).\end{aligned}$$

L'application $g : s \mapsto \phi(x - y - se_j)$ est C^∞ et $g'(s) = \partial_j\phi(x - y + se_j)$. D'après le théorème des accroissements fini, pour tout y et tout n il existe $s(n, y) \in \mathbb{R}$ tel que $|s(n, y)| \leq |t_n|$ et

$$\varphi_n(y) = \tfrac{1}{t_n}\big(g(t_n) - g(0)\big) = \partial_j\psi(x - y + s(n, y)e_j).$$

L'application $h : s \mapsto \partial_j\psi(x - y + se_j)$ est C^∞ et $h'(s) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2}(x - y + se_j)$. L'inégalité des accroissements finis donne alors

$$|\varphi_n(y) - \partial_j\psi(x - y)| = |h(s(n, y)) - h(0)| \leq |s(n, y)| \cdot ||\tfrac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2}||_\infty \leq |t_n| \cdot ||\tfrac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2}||_\infty$$

La majoration ne dépendant pas de y, on obtient $||\varphi_n - \partial_j\widetilde{\tau_x\psi}||_\infty \leq |t_n| \cdot ||\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2}||_\infty$ ce qui montre la convergence uniforme de φ_n vers $\partial_j\widetilde{\tau_x\psi}$.
Une récurrence permet alors de montrer de manière analogue pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha\varphi_n$ converge uniformément vers $\partial^\alpha\partial_j\widetilde{\tau_x\psi}$. Ainsi, puisque $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ pour tout n, la suite $(\langle u, \varphi_n\rangle)_n$ converge vers $\langle u, \partial_j\widetilde{\tau_x\psi}\rangle$. Autrement dit

$$\partial_j(u * \psi)(x) = \lim_{n\to\infty}\langle u, \varphi_n\rangle = \langle u, \partial_j\widetilde{\tau_x\psi}\rangle$$

L'application $x \mapsto \langle u, \partial_j\widetilde{\tau_x\psi}\rangle$ est continue donc $u * \psi$ est de classe C^1. Une récurrence et des calculs fastidieux permettent alors de montrer que $u * \psi$ est C^∞. $\square$