1.4 Caractères

Définition 1.10

Soit G un groupe abélien. Un caractère de G est un morphisme (de groupes) de G dans $\mathbb{C}^*$.

Remarque 1.4.1. L'ensemble des caractères de G est un groupe pour pour le produit.

1.4.1 Le groupe $\mathbb{R}^d$

Théorème 1.6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. *f est un vecteur propre pour les translations τ_a.*
2. *Pour tous x, y, $f(0)f(x+y) = f(x)f(y)$.*

Si de plus f est dérivable, les assertions précédentes sont équivalentes à

3. *f est un vecteur propre pour la dérivation.*

Preuve. • 1. $\Rightarrow$ 2. Pour tout y, il existe $\lambda(y)$ tel que $f(x-y) = \lambda(y)f(x)$. Alors $f(x+y) = \lambda(-y)f(x)$ et $f(y) = \lambda(-y)f(0)$. D'où $f(0)f(x+y) = f(0)\lambda(-y)f(x) = f(x)f(y)$.
• 2. $\Rightarrow$ 1. Comme $f(0)f(2x) = f(x)^2$, si $f(0) = 0$, f est constante égale à 0. Supposons que $f(0) \neq 0$. $f(0)^2 = f(0)f(x-x) = f(x)f(-x)$ et f n'est alors jamais nulle. Fixons y. Pour tout x $f(x-y) = \frac{f(-y)}{f(0)} f(x) = \lambda(y)f(x)$.
• 2. $\Rightarrow$ 3. Puisque pour tout x,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\Big(\frac{f(x)f(h)}{f(0)} - f(x)\Big) = \frac{f(x)}{f(0)}\Big(\frac{f(h) - f(0)}{h}\Big)$$

alors pour tout x, $f'(x) = \frac{f'(0)}{f(0)} f(x)$
• 3. $\Rightarrow$ 2. Les vecteurs propres pour la dérivation sont les $x \mapsto e^{\lambda x}$ qui satisfont bien la condition 2. $\square$

Pour $\xi \in \mathbb{C}$, on note $e_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto e^{t\xi}$. Nous venons de voir que les fonctions e_ξ sont les caractères dérivables de $\mathbb{R}$. Il se trouve que la condition de régularité est superflue.

Théorème 1.7

Les caractères mesurables de $\mathbb{R}$ sont les e_ξ, $\xi \in \mathbb{C}$.

Le point clé est le lemme suivant :

Lemme 1.3

Les caractères mesurables de $\mathbb{R}$ sont continus.

La preuve du lemme repose sur la version faible suivante du théorème de Lusin qui se déduit aisément de la version forte du théorème de Lusin.

Théorème 1.8 (Version faible du théorème de Lusin)

Soit I un intervalle relativement compact de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ mesurable. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \subset I$ compact tel que $f_{|K}$ est continue et $\lambda(I \setminus K) \leq \varepsilon$.

Preuve du lemme. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ un caractère mesurable. Il suffit de montrer la continuité en $0 : \varphi(x+h) - \varphi(x) = \varphi(x)(\varphi(h) - \varphi(0))$. Quels que soient x, y

$$(*)|\varphi(x) - \varphi(0)| = \frac{1}{|\varphi(y)|}|\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Le théorème de Lusin pour $I = [0,1]$ et la valeur $1/3$ donne l'existence de $K \subset [0,1]$ compact tel que $\lambda[0,1] \setminus K) \leq 1/3$ et et $\varphi_{|K}$ continue. Il existe alors $r > 0$ tel que pour tout $z \in K$,$|\varphi(z)| \geq r$. Il existe alors $\eta > 0$ tel que pour tous $u, v \in K$, $|u - v| < \eta \Rightarrow |\varphi(u) - \varphi(v)| < r\varepsilon$. Posons $\delta = \min(\eta, 1/3)$. Pour $x \in [-\delta, \delta[$, $K \cap (K - x) \neq \emptyset$. En effet sinon, $\lambda(K \cup K - x) \geq 4/3$ ce qui est impossible car cette union est contenue dans $[-\delta, 1]$. pour $x \geq 0$ et dans $[0, 1+\delta]$ pour $x \leq 0$. Alors en choisissant $y \in K \cap (K - x)$ dans $(*)$ on obtient $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \varepsilon$. Et ce pour $x \in]-\delta, \delta[$. □

Preuve du théorème. Soit φ un caractère mesurable. D'après le lemme, il est continu. Montrons que φ est C^1. Comme $\varphi(0) = 1$, il existe $\varepsilon >$ tel que pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\Re\varphi(t) > 0$. En particulier $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(t)dt \neq 0$. Notons $a = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(t)dt$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(t)dt = \varphi(x) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(t)dt = a\varphi(x)$$

L'application $F : x \mapsto \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(t)dt$ est dérivable de dérivée $x \mapsto \varphi(x)(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) = 2\varphi(x)\varphi(\varepsilon)$, et F et même de classe C^1. Ainsi φ est de classe C^1. □

Remarque 1.4.2. Les caractères mesurables bornés de $\mathbb{R}$ sont les e_{ia} pour $a \in \mathbb{R}$.

Corollaire 1.4.1

Les caractères mesurables de $\mathbb{R}^d$ sont les $e_z : x \mapsto e^{\langle x,z \rangle}$ où $\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^d$. Les caractères mesurables bornés de $\mathbb{R}^d$ sont les $e_\xi : x \mapsto e^{i\langle x,\xi \rangle}$ où $\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^d$.

Preuve. Notons $(u_1, \dots, u_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soit φ un caractère mesurable de $\mathbb{R}^d$. Posons $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \varphi(tu_k)$. Alors φ_k est un caractère de $\mathbb{R}$ donc il existe $z_k \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi_k(t) = e^{\bar{z}_k t}$. D'où si $x = (x_1, \dots, x_d)$,

$$\varphi(x) = \prod_{k=1}^{d} \varphi_k(x_k) = e^{\sum_{k=1}^{d} \bar{z}_k x_k} = e^{\langle z,x \rangle}.$$

Le cas borné est alors immédiat. □

1.4.2 Le cercle $\mathbb{T}$

On note $\mathbb{T}$ le groupe quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $p = \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ la projection. On munit $\mathbb{T}$ de la topologie quotient : il devient un *groupe topologique*, c'est à dire un groupe muni d'une topologie pour laquelle les opérations

$$\begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$$

sont continues (pour la seconde $G \times G$ est muni de la topologie produit).
Par définition de la topologie quotient, la projection p est continue. Une spécificité de la topologie quotient dans le cas de groupes quotient est que p est aussi ouverte.

Propriété 1.4.1

La projection p est ouverte.

Preuve. Soit $O \subset \mathbb{R}$ ouvert. Alors $p^{-1}(p(O)) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} O + n$ qui est ouvert comme union d'ouvert. □

Muni la tribu borélienne engendrée par la topologie, $\mathbb{T}$ devient un espace mesurable et on définit alors une mesure μ sur $\mathbb{T}$ par

$$\mu(A) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbb{1}_A(p(x))dx.$$

Propriété 1.4.2

La mesure μ est invariante par translation.

Preuve. Soit $b \in \mathbb{T}$ et $A \subset \mathbb{T}$ un borélien. Soit $\tilde{b} \in [0, 2\pi[$ l'unique antécédant de b par p.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{b+A}(p(x))dx &= \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_A(p(x)-\tilde{b})dx = \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_A(p(x-\tilde{b}))dx \\ &= \int_{-\tilde{b}}^{2\pi-\tilde{b}} \mathbb{1}_A(p(x))dx = \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_A(p(x))dx\end{aligned}$$

la dernière égalité venant de ce que p est 2π-périodique. □

La mesure ainsi construite est une *mesure de Haar* sur le groupe $\mathbb{T}$, c'est l'unique mesure de Haar de masse totale 1. On peut montrer que tout groupe topologique localement compact possède une mesure de Haar et que deux telles mesures sont proportionnelles.

Notons qu'ici la tribu borélienne sur $\mathbb{T}$ est l'*image de la tribu borélienne de* $\mathbb{R}$ par la projection p. En général, l'image d'une tribu n'est pas une tribu.

Propriété 1.4.3

$\mathscr{B}_{\mathbb{T}} = p(\mathscr{B}_1)$.

Preuve. Comme p est continue, et donc borélienne, pour tout $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{T}}$, $p^{-1}(B) \in \mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_{\mathbb{T}} \subset p(\mathscr{B}_1)$.
Soit $A \in \mathscr{B}_1$. Posons $A' = A \cap (\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z})$ et $A'' = A \cap 2\pi\mathbb{Z}$; A' et A'' sont deux boréliens. Notons $\bar{0} = p(2\pi\mathbb{Z})$. Alors $p(A) = p(A'') \cup p(A')$ avec $p(A'')$ soit vide soit égal à $\{\bar{0}\}$. Or $p(A') = p(2\pi\mathbb{Z} + A') = p((2\pi\mathbb{Z} + A')\cap]0, 2\pi[)$ avec $(2\pi\mathbb{Z} + A')\cap]0, 2\pi[) \in \mathscr{B}_1$. La restriction $q := p_{|]0,2\pi[} :]0, 2\pi[\to \mathbb{T} \setminus \{\bar{0}\}$ est un homéomorphisme donc $p(A') = (q^{-1})^{-1}((2\pi\mathbb{Z} + A')\cap]0, 2\pi[)$ est un borélien de $\mathbb{T}$. Ainsi $p(A) \in \mathscr{B}_{\mathbb{T}}$ et $p(\mathscr{B}_1) = \mathscr{B}_{\mathbb{T}}$. □

Soit X un ensemble. Il existe une correspondance bijective entre applications $f : \mathbb{T} \to X$ et application $\tilde{f} : \mathbb{R} \to X$ 2π-périodique ; ces applications sont reliées par le digramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & X \\ \mathbb{T}. \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

On dit que $\tilde{f}$ relève f à $\mathbb{R}$. La proposition suivante est une simple vérification laissée au lecteur.

Proposition 1.4.1

Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ et $\tilde{f}$ son relevé.

1. *f est mesurable si et seulement si $\tilde{f}$ est mesurable.*
2. *f est continue si et seulement si $\tilde{f}$ est continue*

Pour alléger les notations, on identifiera sans distinction de notation une application $f : \mathbb{T} \to \mathbb{K}$ et son relevé à $\mathbb{R}$.

Proposition 1.4.2

Les caractères mesurables de $\mathbb{T}$ sont les $e_k : x \mapsto e^{ikx}$.

Preuve. En vertu de ce qui précède, un caractère de $\mathbb{T}$ est donné par un caractère de $\mathbb{R}$ qui est 2π-périodique. □

1.4.3 Caractères d'une algèbre de Banach

Une *algèbre de Banach sur* $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre qui est un espace de Banach. L'espace $L^1(\mathbb{K})$ est une algèbre de Banach.

Définition 1.11

Un caractère d'une algèbre de Banach A est un morphisme d'algèbre de A dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire une forme linéaire qui commute au produit.

Proposition 1.4.3

Un caractère d'une algèbre de Banach est continu.

Preuve. Soit $\varphi : A \to \mathbb{C}$ un caractère. Soit $x \in A$ tel que $\varphi(x) = 1$. Alors $||x|| \geq 1$. En effet, supposons $||x|| < 1$: la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} x^k$ est alors convergente et on note s sa somme. Dans ce cas

$$\varphi(s) = \varphi(x + \sum_{k\geq 1} x^k) = \varphi(x) + \varphi(sx) = 1 + \varphi(s)$$

ce qui est exclu. Soit x tel que $\varphi(x) \neq 0$. Alors $\varphi(\frac{x}{\varphi(x)}) = 1$ donc $|\varphi(x)| \leq ||x||$ et φ est bornée. □

Le théorème suivant justifie l'attention particulière porté aux caractères mesurables bornés de $\mathbb{R}^d$.

Théorème 1.9

Soit Φ un caractère de $L^1(\mathbb{R}^d)$. Il existe un caractère mesurable borné χ tel que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi f d\lambda.$$

Réciproquement, si χ est un caractère mesurable borné, l'application

$$\Psi_\chi : f \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \chi f d\lambda$$

est un caractère de $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Esquisse de preuve. . La seconde partie est la parte facile du théorème. Soit χ un caractère mesurable borné de $\mathbb{R}^d$. Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$ tel que $\chi : x \mapsto e^{i\langle x,\xi\rangle}$.
Pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\chi f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. L'application Ψ_χ est donc une forme linéaire continue (de norme 1). De plus

$$\begin{aligned}
\Psi_\chi(f * g) &= \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x) f * g(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x) f(t) g(x-t) dt dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \chi(t) f(t) \big(\int_{\mathbb{R}^d} \chi(x-t) g(x-t) dx \big) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \chi(t) f(t) dt \int_{\mathbb{R}^d} \chi(u) g(u) du \quad = \quad \Psi_\chi(f) \Psi_\chi(g).
\end{aligned}$$

La première partie est proposée en exercice. Elle repose sur le fait que le dual topologique de $L^1(\mathbb{R}^d)$ est $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit Φ un caractère non trivial de $L^1(\mathbb{R}^d)$ et soit h une fonction bornée telle que pour tout $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\Phi(g) = \int_{\mathbb{R}^d} hg d\lambda$.

1. Montrer que $h(x+y) = h(x)h(y)$ pour presque tout $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.
2. Montrer qu'il existe un **borélien A de mesure finie** tel que $\int_A h d\lambda \neq 0$. (***Indication** : on pourra utiliser le fait que toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est limite de fonctions étagées ainsi qu'une caractérisation de $||\cdot||_\infty$ vue plus tôt.)*
3. Vérifier que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $h(x) = h * \mathbf{1}_{-A}$ où $-A := \{-y \,|\, y \in A\}$.
4. Montrer que $h * \mathbf{1}_{-A}$ est un caractère borné de $\mathbb{R}^d$ et conclure. □

L'image dans $\mathbb{C}^*$ d'un caractère borné est un sous-groupe borné de $\mathbb{C}^*$ donc un sous-groupe du groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. Ceci justifie la définition suivante :

Définition 1.12

Le groupe dual d'un groupe abélien G est le groupe des morphismes de G dans $\mathbb{U}$, noté $\widehat{G}$.

L'application $\mathbb{R}^d \to \widehat{\mathbb{R}^d} : \xi \mapsto e_\xi$ étant un isomorphisme (de groupes), on peut écrire

$$\widehat{\mathbb{R}^d} = \mathbb{R}^d \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}.$$