Feuille de TD 3 : tangentes et points singuliers

Exercice 1. Soit a un réel strictement positif. On considère la cycloïde d'équation :

$$x(t) = a(t - \sin(t)) \text{ et } y(t) = a(1 - \cos(t)).$$

1. Déterminer les éventuels points singuliers de la cycloïde.
2. Déterminer la tangente en tout point de la cycloïde. (Distinguer deux cas, $t = 2k\pi$ et $t \neq 2k\pi$).

Exercice 2. 1. Déterminer la tangente en tout point de l'astroïde d'équations

$$x(t) = \cos^3(t) \text{ et } y(t) = \sin^3(t).$$

2. Pour $t \in]0, \pi/2[$, on note $A(t)$ et $B(t)$ les points d'intersection de la tangente au point courant $M(t)$ avec respectivement (Ox) et (Oy). Calculer la longueur $A(t)B(t)$.

Exercice 3. On considère la courbe représentée par

$$x(t) = \frac{t}{1-t^2} \text{ et } y(t) = t - \frac{t^3}{1-t^2}.$$

Déterminer les points où les tangentes sont horizontales.

Exercice 4. Donner la nature des points M_0 situé sur la courbe $\mathcal{C}$ quand $t = t_0$, dans chacun des cas suivants :

1. $$\begin{cases} x(t) = \cos t(1 + \cos t) \\ y(t) = \sin t(1 + \cos t) \end{cases} \text{ et } t_0 = \pi.$$

2. $$\begin{cases} x(t) = t^2 - t^5 \\ y(t) = t^4 \end{cases} \text{ et } t_0 = 0.$$

Exercice 5. Comment faut-il choisir a et b pour que la courbe $\mathcal{C}$ définie par

$$x(t) = 2t + \frac{a^3}{t^2} \text{ et } y(t) = t^2 + \frac{2b^3}{t}$$

possède un point de rebroussement ? Étudier dans chacun des cas trouvés la nature des points.