

Feuille de TD 1 : Rappels sur les fonctions trigonométriques

Exercice 1 (Formules à connaître). En utilisant l'identité $e^{it} = \cos t + i \sin t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, retrouver les égalités suivantes pour a, b dans \mathbb{R}

1. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
2. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$,
3. $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,
4. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

En déduire les égalités suivantes pour $t \in \mathbb{R}$

1. $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$
2. $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

Exercice 2. Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective dérivable. On suppose que pour tout $t \in I$, $f'(t) \neq 0$. Montrer que la bijection réciproque f^{-1} est dérivable et que pour tout $s \in J$, $(f^{-1})'(s) = \frac{1}{f'(f^{-1}(s))}$.

- Exercice 3.**
1. Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$.
 2. Soit $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ la bijection réciproque. Vérifier que \arcsin est dérivable sur $] - 1, 1[$ et que $\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.
 3. Montrer que la fonction cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
 4. Soit $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ la bijection réciproque. Vérifier que \arccos est dérivable sur $] - 1, 1[$ et que $\arccos'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$.
 5. Montrer que la fonction tangente réalise une bijection de $] - \pi/2, \pi, 2[$ sur \mathbb{R} .
 6. Soit $\arctan :] - \pi/2, \pi, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ la bijection réciproque. Vérifier que \arctan est dérivable sur \mathbb{R} et que $\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Exercice 4. Soit $\theta \in] - \pi, \pi[$. On note $t = \tan(\theta/2)$. Exprimer $\cos \theta$ et $\sin \theta$ en fonction de t .