Université de Picardie Jules Verne **2012-2013**
UFR des Sciences

Licence mention Mathématiques - Semestre 3
Statistique
Partiel du mercredi 7 novembre 2012
Durée 2h00
Tout document interdit - Calculatrices autorisées

Exercice 1.

Chaque jour, une entreprise produit des condensateurs identiques en grande quantité. La capacité nominale des condensateurs est 210 µF .

1) Lors d'un contrôle qualité effectué sur 200 condensateurs choisis au hasard dans la production, on a mesuré la capacité réelle de chaque condensateur et on a obtenu les résultats suivants :

Capacité en µF	$]165;185]$	$]185;195]$	$]195;205]$	$]205;215]$	$]215;225]$	$]225;235]$	$]235;255]$
Nombre de condensateurs	4	20	44	64	48	18	2

Pour la présentation des différents calculs effectués dans les questions suivantes, on construira dès le début un unique tableau présentant l'ensemble des résultats demandés ou utiles.

a) Préciser la population étudiée, la variable étudiée et sa nature, la taille de l'échantillon.

b) Représenter graphiquement les résultats présentés ci-dessus.

c) Calculer les fréquences cumulées croissantes de cette distribution et tracer le polygone des fréquences cumulées.

c) En déduire par lecture graphique, puis par une formule d'interpolation linéaire, la valeur de la médiane et des quartiles de la distribution. Interpréter les résultats obtenus et les représenter graphiquement à l'aide d'une boîte à moustaches (limites des moustaches : borne inférieure de la première classe et borne supérieure de la dernière classe).

d) Donner la moyenne et l'écart-type de la distribution ; préciser les données utilisées pour le calcul.

e) Pour les séries de faible dissymétrie, on a la relation de Pearson :

$$mode = 3 \times médiane - 2 \times moyenne.$$

Calculer le mode de la distribution étudiée à l'aide de cette relation et commenter ce résultat.

2) On note X la variable aléatoire qui associe à un condensateur choisi au hasard dans la production sa capacité réelle en µF, et on admet que X suit la loi normale de moyenne 210 et d'écart type 12.

Un condensateur est déclaré conforme lorsque sa capacité réelle appartient à l'intervalle [189 ; 252].

On prélève au hasard un condensateur dans la production.

Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que ce condensateur soit conforme.

3) Chaque condensateur fabriqué peut présenter deux défauts : l'un au niveau des armatures, appelé défaut A, et l'autre au niveau du diélectrique, appelé défaut B.

Une étude statistique a montré que 2 % des condensateurs fabriqués présentent le défaut A et 1 % le défaut B. La présence du défaut A sur un condensateur choisi au hasard dans la production est considérée comme un évènement indépendant de la présence du défaut B sur le même condensateur.

On prélève un condensateur au hasard dans la production.

a) Traduire les données de l'énoncé en termes de probabilité d'événements. Préciser l'expérience aléatoire considérée et proposer un espace probabilisé adapté à cette expérience.

b) Calculer la probabilité que ce condensateur présente les deux défauts A et B.

c) Calculer la probabilité que ce condensateur ne présente aucun défaut.

d) Calculer la probabilité que ce condensateur présente au moins un des deux défauts.

Exercice 2

Le tableau ci-dessous présente les quantités de gazole livrées et vendues en France de 2001 à 2010 (les quantités sont exprimées en millions de tonnes).

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quantité : y_i	28,6	29,4	30,1	30,8	31,1	31,9	32,8	33,0	33,1	33,4

1) a) Représenter graphiquement la série statistique (x_i, y_i).

b) Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Placer ce point sur le graphique.

2) Un premier ajustement.

a) Donner une équation de la droite de régression de y en x. Tracer cette droite sur le graphique.

b) Donner le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Interpréter le résultat obtenu.

c) En utilisant ce modèle, déterminer à partir de quelle année la consommation de gazole devrait dépasser 35 millions de tonnes.

3) Un deuxième ajustement. On considère la nouvelle variable $z = e^{\frac{y}{10}}$.

a) Donner une équation de la droite de régression de z en x. Donner le coefficient de corrélation linéaire entre x et z. Interpréter le résultat obtenu.

b) En déduire une nouvelle expression de y en fonction de x.

c) En utilisant ce nouveau modèle, déterminer à partir de quelle année la consommation de gazole devrait dépasser 35 millions de tonnes.

Exercice 3

1) À la suite d'une campagne de vaccination lancée par l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS) pour lutter contre une pandémie, on estime que, dans une population donnée, il ne reste plus que 1% de personnes non vaccinées. D'après une étude, on estime également que 95% des personnes vaccinées sont immunisées contre le virus de la pandémie, et que 20% des personnes non vaccinées sont naturellement immunisées contre ce virus.

On choisit au hasard une personne dans la population concernée.

a) Traduire les données de l'énoncé en termes de probabilité d'événements.

b) Calculer la probabilité que la personne choisie soit immunisée contre le virus. Justifier les calculs effectués.

c) Calculer la probabilité que la personne choisie ait été vaccinée sachant qu'elle est immunisée contre le virus. Arrondir au millième.

2) On admet que 1 % des personnes d'une très grande population donnée n'a pas été vacciné. On prélève au hasard 400 personnes de cette population. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 400 personnes, associe le nombre de personnes de ce prélèvement n'ayant pas été vaccinées.

a) Justifier que la variable X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b) Calculer la probabilité qu'un prélèvement de 400 personnes contienne au plus une personne non vaccinée. Arrondir au millième.

3) a) Justifier que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson dont on précisera le paramètre λ.

b) En déduire une valeur approchée de $P(X > 5)$ arrondie au millième. Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

4) On estime que 20 % des personnes non vaccinées sont naturellement immunisées contre le virus. Parmi les personnes non vaccinées, on prélève au hasard 200 personnes. On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 200 personnes parmi les personnes non vaccinées, associe le nombre de personnes de ce prélèvement qui ne sont pas immunisées contre le virus. On admet que Y suit la loi binomiale de paramètres 200 et $0,8$.

a) Justifier que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi normale dont on précisera les paramètres.

b) En déduire une valeur approchée de la probabilité qu'il y ait, dans un prélèvement de 200 personnes, entre 155 et 165 personnes non immunisées contre le virus. Arrondir au centième.

Exercice 4

1) a) Rappeler la définition d'une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x \text{ si } x \in [0,2] \\ 0 \text{ si } x \notin [0,2] \end{cases}$ est une densité sur $\mathbb{R}$.

.

2) a) Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X admettant f pour densité.

b) En déduire les probabilités $P(X \leq 1)$ et $P\left(\frac{1}{2} < X \leq 1\right)$.

TABLE 1

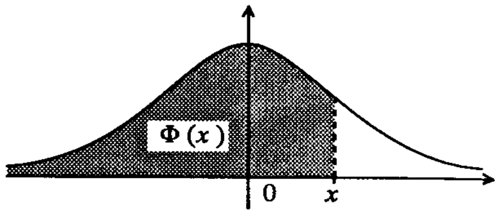
Fonction de répartition de la loi normale réduite

Si U suit la loi normale réduite, pour $x \geqslant 0$, la table donne la valeur :

$\phi(x) = P(U \leqslant x)$.

La valeur x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.
Pour $x < 0$, on a :

$\phi(x) = 1 - \phi(-x)$.



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

Quelques valeurs supplémentaires

x	$\phi(x)$
2,99	0,998605
3,00	0,998650
3,50	0,999767
4,00	0,999968
4,50	0,999997
5,00	1,000000