

Licence mention Mathématiques et mention Informatique parcours MIAGE - Semestre 3
Statistique et Probabilités
Partiel du lundi 2 novembre 2009

Durée 2h00

Tout document interdit - Calculatrices autorisées

Exercice 1.

1) Le département Marketing de la société Rola-Cola souhaite étudier le comportement des consommateurs vis-à-vis de Rola-Cola et de la marque concurrente Cora-Cola. Une enquête a été réalisé sur des clients choisis au hasard dans un centre commercial et auxquels on a posé les questions suivantes :

Question 1 : Quelle boisson préférez-vous ? Rola-Cola (RC) ou Cora-Cola (CC).

Question 2 : Avez-vous déjà acheté Rola-Cola ? Oui (O) ou Non (N).

Question 3 : Quelle est votre réaction à la phrase "J'aime les boissons au Cola sucrées" ?
D'accord (DA), Pas sûr (PS) ou Pas d'accord (PA).

Question 4 : Combien de litres de boisson au Cola votre famille a-t-elle bu le mois dernier ?

Les réponses des clients ont été les suivantes :

n° client	Q1	Q2	Q3	Q4	n° client	Q1	Q2	Q3	Q4	n° client	Q1	Q2	Q3	Q4
1	RC	O	DA	1	11	RC	O	DA	6	21	RC	O	PS	6
2	CC	N	PA	6	12	CC	O	PA	2	22	RC	O	DA	8
3	RC	O	DA	4	13	RC	O	PS	4	23	CC	N	PA	2
4	CC	O	PS	7	14	RC	O	DA	7	24	CC	N	PS	17
5	RC	O	PS	2	15	RC	O	PS	11	25	RC	O	DA	5
6	CC	O	DA	12	16	RC	O	PA	4	26	CC	N	PS	14
7	CC	N	PA	6	17	CC	O	DA	3	27	RC	O	PA	15
8	RC	O	PA	2	18	CC	N	PS	10	28	RC	O	PA	5
9	RC	O	PS	9	19	RC	O	DA	5	29	CC	O	PS	9
10	RC	O	PS	5	20	CC	O	PA	7	30	RC	O	PS	4

- 1) Préciser la population étudiée, les variables étudiées et leur nature, la taille de l'échantillon.
- 2) Présenter les données obtenues avec la question Q3 dans un tableau modalités/effectifs, puis graphiquement de deux façons différentes.
- 3) Pour la présentation des différents calculs effectués dans les questions suivantes, on construira dès le début un unique tableau présentant l'ensemble des résultats demandés ou utiles.
 - a) Présenter les données obtenues avec la question Q4 dans un tableau classes/effectifs, en prenant pour classes $[0,5; 3,5]$, $]3,5; 6,5]$, $]6,5; 9,5]$, $]9,5; 12,5]$, $]12,5; 15,5]$ et $]15,5; 18,5]$. Ce type de présentation des données correspond-il à la nature de la variable étudiée ?
 - b) Lors du regroupement des observations en classes, la règle de Sturges donne le nombre k de classes à prendre en fonction du nombre n d'observations : $k \simeq 1 + \frac{10}{3} \log_{10}(n)$. Cette règle a-t-elle été respectée ? Justifier alors le choix qui a été fait pour les amplitudes et les bornes des classes.
 - c) Représenter graphiquement les résultats présentés dans le tableau construit au a).
 - d) Calculer les fréquences cumulées (croissantes) de la distribution et tracer le polygone des fréquences cumulées.
 - e) En déduire par lecture graphique, puis par une formule d'interpolation linéaire, la valeur de la médiane et des quartiles de la distribution. Interpréter les résultats obtenus.
 - f) A partir du tableau construit au a), donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la moyenne et l'écart-type de la distribution. Préciser les données à partir desquelles ces valeurs ont été obtenues.
- 4) On suppose que pour un client, la consommation de boisson au Cola (en litres) est une variable aléatoire X de loi Normale $\mathcal{N}(6,6; 3,85)$. Calculer la probabilité qu'un client choisi au hasard ait une consommation de boisson au Cola comprise entre 5 et 10 litres.

Exercice 2.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs expérimentales du volume V et de la pression P d'un gaz.

Volume (en cm^3) : v_i	620	890	1013	1186	1454	1944	2313	3179
Pression (en Kg par cm^3) : p_i	6.7	4.3	3.48	2.644	1.997	1.35	1.1	0.7

D'après les lois de la thermodynamique de Laplace pour un gaz parfait, on a la relation $PV^\gamma = C$, où γ et C sont des constantes.

- 1) Préciser la population, la(es) variable(s) étudiée(s) et la taille de l'échantillon.
- 2) On considère les variables $X = \ln V$ et $Y = \ln P$. Démontrer que $Y = -\gamma X + \ln C$.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs expérimentales transformées :

$x_i = \ln v_i$	6,430	6,791	6,921	7,078	7,282	7,573	7,746	8,064
$y_i = \ln p_i$	1,902	1,459	1,253	0,956	0,693	0,336	0,095	-0,357

- 3) Donner une équation de la droite de régression de y en x . Donner le coefficient de corrélation linéaire entre x et y . Interpréter le résultat obtenu.
- 4) En déduire, en justifiant, la valeur de γ et de C , puis une équation de P en fonction de V .
- 5) Déterminer une estimation de la pression du gaz pour un volume de 2000 cm^3 , puis pour 4000 cm^3 . Ces deux estimations sont-elles fiables ?

Exercice 3

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3 dont 6 % sont défectueux.

Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite. Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.

On contrôle un lecteur MP3 choisi au hasard dans la production et on note D l'événement : "le lecteur MP3 est défectueux" et R l'événement : "l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3".

- 1) Traduire les données de l'énoncé en terme de probabilité d'événements. On justifiera ces probabilités en précisant l'expérience aléatoire considérée et en proposant un espace probabilisé adapté à cette expérience.
- 2) Calculer la probabilité que le lecteur MP3 soit rejeté.
- 3) Lorsque le lecteur MP3 est rejeté, quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?
- 4) Lorsque le lecteur MP3 n'est pas rejeté, quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?
- 5) Le système de contrôle vous paraît-il fiable ?

Exercice 4

1) Soient Ω un univers et P une probabilité associés à une expérience aléatoire. Soient A et B deux événements. On rappelle que $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$.

Démontrer que si les événements A et B sont indépendants, alors les événements \bar{A} et B le sont aussi.

2) Chaque matin de cours (du lundi au vendredi), un étudiant peut être victime de deux événements indépendants :
- R : "il n'entend pas son réveil sonner"
- S : "son scooter, mal entretenu, tombe en panne".

Il a observé que chaque jour de cours, la probabilité de R est égale 0,1 et que celle de S est égale à 0,05.

Lorsque qu'au moins l'un des deux événements R ou S se produit, l'étudiant est en retard à l'université ; sinon il est à l'heure.

- a) Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, l'étudiant entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.
 - b) Calculer la probabilité que l'étudiant soit à l'heure à l'université un jour de cours donné.
- 3) Au cours d'une semaine, l'étudiant se rend cinq fois à l'université. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où l'étudiant entend le réveil.
- a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Justifier votre réponse.
 - b) Quelle est la probabilité que l'étudiant entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ?
- 4) On observe le comportement de l'étudiant sur une période de 20 semaines de cours. Calculer la probabilité qu'il y ait entre 85 et 95 jours où il entende le réveil. On pourra utiliser une loi approchée en justifiant son utilisation.

TABLE 1**Fonction de répartition
de la loi normale réduite**

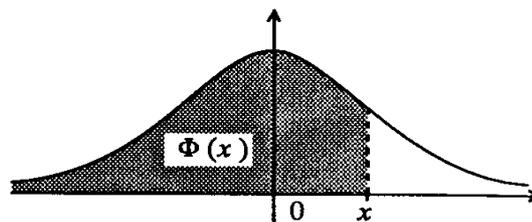
Si U suit la loi normale réduite, pour $x \geq 0$, la table donne la valeur :

$$\phi(x) = P(U \leq x).$$

La valeur x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Pour $x < 0$, on a :

$$\phi(x) = 1 - \phi(-x).$$



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6