

Licence mention Mathématiques et mention Informatique parcours MIAGE - Semestre 3  
Statistique et Probabilités  
Partiel du lundi 3 novembre 2008

Durée 2h00

Tout document interdit - Calculatrices autorisées

**Exercice 1.**

1) Un organisme d'enquête et de sondage a réalisé une étude sur le nombre de salariés de 40 PME (petite et moyenne entreprise) d'un secteur industriel donné. Le dépouillement des questionnaires a donné les résultats suivants :

21 22 24 29 35 37 41 43 44 44 47 48 49 49 52 52 53 54 55 55  
56 57 57 58 59 59 62 62 64 65 69 70 71 73 75 79 82 89 96 98

Pour la présentation des différents calculs effectués dans les questions suivantes, on construira dès le début un unique tableau présentant l'ensemble des résultats demandés ou utiles.

- Préciser la population étudiée, la variable étudiée et sa nature, la taille de l'échantillon.
- Présenter les données ci-dessus dans un tableau classes/effectifs, en prenant pour classes  $]20; 40]$ ,  $]40; 50]$ ,  $]50; 60]$ ,  $]60; 80]$  et  $]80; 100]$ . Ce type de présentation des données correspond-il à la nature de la variable étudiée ? Expliquer le choix qui a été fait pour cette présentation.
- Représenter graphiquement les résultats présentés dans le tableau construit au b).
- Calculer les fréquences cumulées (croissantes) de la distribution et tracer le polygone des fréquences cumulées.
- En déduire par lecture graphique, puis par une formule d'interpolation linéaire, la valeur de la médiane et des quartiles de la distribution. Interpréter les résultats obtenus et les représenter graphiquement à l'aide d'une boîte à moustaches.
- A partir du tableau construit au b), donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de la moyenne et l'écart-type de la distribution. Préciser les données à partir desquelles ces valeurs ont été obtenues.
- A partir des données présentées dans l'énoncé, on obtient une moyenne égale à 56,375. Comparer avec le résultat obtenu au f) et expliquer l'éventuelle différence entre les deux résultats.

- 2) Dans la question 1)b), on a pu observer que 6 des 40 PME étudiées avait moins de 40 salariés. On choisit au hasard 10 des 40 PME étudiées. On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre d'entreprise (parmi les 10 choisies) qui ont moins de 40 salariés.
- Quel est la loi de probabilité de  $X$  ? Justifier la réponse. Préciser les valeurs possibles de  $X$ .
  - Calculer la probabilité que 4 entreprises exactement aient moins de 40 salariés.

- 3) Une étude statistique menée par le même organisme a montré que le salaire (en euros) d'un salarié d'une PME du secteur étudié est une variable aléatoire  $Y$  de loi Normale  $\mathcal{N}(1400; 150)$ .
- Quel est le salaire moyen d'un salarié ?
  - Calculer la probabilité qu'un salarié choisi au hasard ait un salaire compris entre 1200 € et 1600 €

**Exercice 2.**

Une banque propose à ses clients de s'abonner au service "bank.net" qui permet de consulter son compte et d'effectuer des transactions via une connexion internet.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de clients de la banque et du nombre de clients abonnés à "bank.net" de l'année 2001 à l'année 2006.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année : $x_i$	1	2	3	4	5	6
Nombre de clients (en milliers) : $y_i$	298	310	321	330	339	348
Nombre d'abonnés à "bank.net" (en milliers) : $z_i$	45	53	63	74	87	103

$y_i$  est le nombre de milliers de clients de la banque au 1er janvier de l'année de rang  $x_i$ ,  $z_i$  est le nombre de milliers de clients de la banque abonnés à "bank.net" au 1er janvier de l'année de rang  $x_i$ .

- 1)
  - a) Préciser la population, la(es) variable(s) étudiée(s) et la taille de l'échantillon.
  - b) Représenter, sur un même graphique, les séries statistiques  $(x_i, y_i)$  et  $(x_i, z_i)$ .
  - c) Calculer le pourcentage de clients de la banque abonnés à "bank.net" au 1er janvier 2001.
  
- 2) Modélisation de l'évolution du nombre de clients de la banque par un ajustement affine.
  - a) Rappeler le critère permettant de déterminer la droite de régression de  $y$  en  $x$  obtenues par la méthode des moindres carrés, et les formules de calcul des coefficients de l'équation.
  - b) Donner une équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$ .
  - c) Donner le coefficient de corrélation linéaire entre  $x$  et  $y$ . Interpréter le résultat obtenu.
  - d) Déterminer une estimation du nombre de clients de la banque au 1er janvier 2010. Cette estimation est-elle fiable ? Justifier la réponse.
  
- 3) Modélisation de l'évolution du nombre d'abonnés à "bank.net" par un ajustement exponentiel.
  - a) Donner une équation de la droite de régression de  $t = \ln(z)$  en  $x$ , et le coefficient de corrélation linéaire entre  $x$  et  $t$ . Expliquer la démarche suivie.
  - b) En déduire une expression de  $z$  en fonction de  $x$ .
  - c) Déterminer une estimation du nombre de clients abonnés à "bank.net" au 1er janvier 2010.
  - d) Quel serait, selon l'estimation précédente et l'estimation obtenue à la question 2)d), le pourcentage de clients de la banque abonnés à "bank.net" au 1er janvier 2010 ?
  
- 4) On suppose que, jusqu'au 1er janvier 2016, le nombre de clients de la banque évolue selon le modèle obtenu à la question 2)b) et le nombre de clients de la banque abonnés à "bank.net" évolue selon le modèle donné à la question 3)b). À l'aide de ces deux modèles, quelles prévisions obtient-on pour 2016 ? Commenter les résultats obtenus.

### Exercice 3.

Une étude réalisée auprès des étudiants de deuxième année a permis d'établir que 55 % des étudiants possèdent un ordinateur. Parmi les étudiants qui possèdent un ordinateur, 98 % possèdent un téléphone portable. De plus, parmi ceux qui possèdent un téléphone portable, 60 % possèdent un ordinateur.

- 1) On choisit au hasard un étudiant de deuxième année.
  - a) Traduire les données de l'énoncé en terme de probabilité d'événements. On justifiera ces probabilités en précisant l'expérience aléatoire considérée et en proposant un espace probabilisé adapté à cette expérience.
  - b) Calculer la probabilité que l'étudiant possède un ordinateur et un téléphone portable.
  - c) En déduire la probabilité que l'étudiant possède un téléphone portable.
  - d) En déduire la probabilité que l'étudiant possède un téléphone portable sachant qu'il ne possède pas d'ordinateur.
  
- 2) On choisit 4 étudiants au hasard, indépendamment les uns des autres ; par exemple en effectuant des tirages successifs avec remise.
  - a) Calculer la probabilité que :
    - i) exactement 2 des 4 étudiants choisis possèdent un ordinateur.
    - ii) au moins 2 des 4 étudiants choisis possèdent un ordinateur.
  - b) Quel est le nombre moyen d'étudiants parmi les 4 choisis qui possèdent un ordinateur ?

**TABLE 1**

**Fonction de répartition  
de la loi normale réduite**

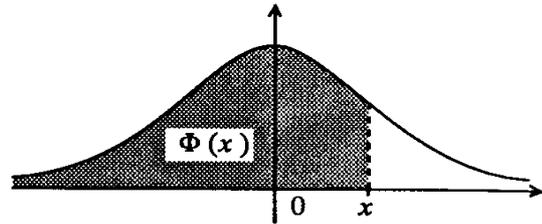
Si  $U$  suit la loi normale réduite, pour  $x \geq 0$ , la table donne la valeur :

$$\Phi(x) = P(U \leq x).$$

La valeur  $x$  s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Pour  $x < 0$ , on a :

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x).$$



$x$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6