

Licence mention Mathématiques - Deuxième année - Semestre 3
Statistiques

Partiel du lundi 5 novembre 2007

Durée 2h00

Tout document interdit - Calculatrices autorisées

Exercice 1.

1) Dans un grand immeuble de 100 étages, on a étudié l'utilisation de l'ascenseur principal. Plus précisément, on a observé au cours d'une journée l'étage choisi par chacune des personnes montant dans l'ascenseur au rez-de-chaussée (étage 0), chaque personne choisissant un seul étage. Les résultats obtenus sont les suivants :

Etage choisi	Nombre de personnes
]0; 10]	490
]10; 20]	510
]20; 30]	480
]30; 40]	520
]40; 60]	980
]60; 80]	1020
]80; 100]	1000

Pour la présentation des différents calculs effectués dans les questions suivantes, on construira dès le début un unique tableau présentant l'ensemble des résultats demandés ou utiles.

a) Préciser la population étudiée, la variable étudiée et sa nature, la taille de l'échantillon. Le type de présentation des données correspond-il à la nature de la variable étudiée ? Expliquer le choix qui a été fait pour cette présentation.

b) Représenter graphiquement les résultats présentés dans le tableau. Que remarquez-vous ? Que pourrait-on en déduire ?

c) Calculer les fréquences cumulées (croissantes) de la distribution et tracer le polygone des fréquences cumulées.

d) En déduire par lecture graphique, puis par une formule d'interpolation linéaire, la valeur de la médiane et des quartiles de la distribution. Interpréter les résultats obtenus et les représenter graphiquement à l'aide d'une boîte à moustaches.

e) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la moyenne et l'écart-type de la distribution. Préciser les données à partir desquelles ces valeurs ont été obtenues.

Dans la suite de cet exercice, r et n sont des entiers naturels non nuls.

On considère un ascenseur qui dessert les r étages d'un immeuble. On suppose que n personnes entrent dans cet ascenseur (vide) au rez-de-chaussée (étage 0). On suppose que chacune des ces personnes, indépendamment des autres, a une probabilité $\frac{1}{r}$ de sortir à l'un des étages. On suppose enfin que personne ne rentre dans l'ascenseur à un étage au-dessus du rez-de-chaussée.

Pour tout i compris entre 1 et r , on désigne par X_i le nombre de personnes sortant à l'étage i , et par Y_i la variable aléatoire égale à 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i (il ne le fait que si au moins une personne sort à cet étage) ou à 0 sinon.

2) Soit i un entier compris entre 1 et n .

a) Quelle est (en fonction de r et n) la loi de probabilité de X_i ? Justifier la réponse.

b) Calculer la probabilité qu'au moins une personne sorte à l'étage i .

c) Quel est le nombre moyen de personnes sortant à l'étage i ?

- d) Dans cette question, on suppose que $r = 100$ et $n = 500$. Calculer la probabilité que 4 personnes (exactement) sortent à l'étage i , en utilisant d'abord la loi exacte de X_i , puis une loi approchée de X_i en justifiant son utilisation. Comparer les deux résultats.
- e) Dans cette question, on suppose que $r = 100$ et $n = 2000$. Calculer la probabilité qu'il y ait entre 15 et 25 personnes qui sortent à l'étage i . On pourra utiliser une loi approchée en justifiant son utilisation.
- 3) Déterminer la loi de probabilité de Y_i , ainsi que son espérance mathématique $E(Y_i)$. On pourra utiliser le résultat de la question 2)b).
- 4) On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur.
- Exprimer Y en fonction de Y_i .
 - En déduire l'espérance mathématique de Y .

Exercice 2.

Le tableau ci-dessous donne une estimation du montant des achats en ligne des ménages français :

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6
Montant d'achats en millions d'euros : y_i	75	260	820	1650	2300	4000	5300

- Préciser la population, la(es) variable(s) étudiée(s) et la taille de l'échantillon.
 - Rappeler le critère permettant de déterminer la droite de régression de y en x obtenues par la méthode des moindres carrés, et les formules de calcul des coefficients de l'équation.
 - Donner une équation de la droite de régression de y en x .
 - Donner le coefficient de corrélation linéaire entre x et y . Interpréter le résultat obtenu.
 - Quelle prévision du montant d'achats peut-on faire pour l'année 2005 ? Cette prévision est-elle fiable ?
- On considère la nouvelle variable $z = \sqrt{y}$.
 - Déterminer une équation de la droite de régression de z en x , ainsi que le coefficient de corrélation linéaire entre x et z . Interpréter le résultat obtenu.
 - En déduire une expression de y en fonction de x , puis une prévision du montant d'achats pour l'année 2005.
- A partir du tableau de données, le logiciel Excel propose un ajustement polynomial par l'équation $y = 130x^2 + 100x + 68$.
 - S'agit-il du même ajustement que celui obtenu dans le 2) ? Expliquer cette situation.
 - Déduire de cet ajustement une prévision du montant d'achats pour l'année 2005.
- Le montant des achats en ligne en 2005 a été de 7700 millions d'euros. Lequel des trois ajustements précédents vous paraît-il le plus conforme à la réalité ? Justifier votre réponse.

Exercice 3.

Un dépistage systématique concernant un éventuel trouble de l'audition est effectué à la naissance. On sait que 2% des nouveaux-nés présentent des troubles de l'audition. Ce dépistage commence par un test donnant 95% de résultats positifs pour les nouveaux-nés atteints de ces troubles, et 6% de résultats positifs pour les nouveaux-nés n'ayant pas ces troubles.

- Traduire les données de l'énoncé en terme de probabilité d'événements. Préciser l'expérience aléatoire considérée et proposer un espace probabilisé adapté à cette expérience.
- Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né pris au hasard ait un test positif ? Justifier le calcul.
- Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né pris au hasard soit atteint de ces troubles sachant que le test a donné un résultat positif ?
- Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né pris au hasard soit atteint de ces troubles sachant que le test a donné un résultat négatif ?
- Le test vous paraît-il fiable ?

TABLE 1**Fonction de répartition
de la loi normale réduite**

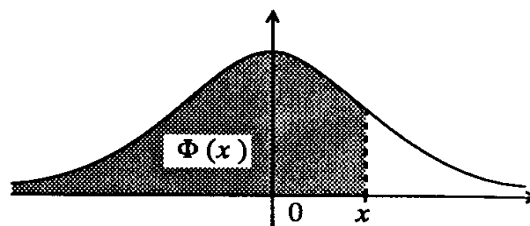
Si U suit la loi normale réduite, pour $x \geq 0$, la table donne la valeur :

$$\phi(x) = P(U \leq x).$$

La valeur x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Pour $x < 0$, on a :

$$\phi(x) = 1 - \phi(-x).$$



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6