

Licence mention Mathématiques - Deuxième année - Semestre 3
Statistiques
Partiel du mardi 8 novembre 2005

Durée 2h00
Tout document interdit - Calculatrices autorisées

Exercice 1.

Une machine fabrique des pièces métalliques de forme cylindrique utilisables pour des branches de lunettes. On s'intéresse à la longueur de l'ensemble des pièces produites par la machine le 7 novembre 2005. On observe les longueurs en *mm* obtenues sur un lot de 50 pièces choisies au hasard et on obtient les résultats suivants :

109,5	109	110	111	113	111	109,5	111	110	109,5	109	111	109	109,5	111	110	110
111	112	110	111	110	111	108,5	111	112	111	111	110	112	109,5	110	112	110
111	110	111	111	110	111	107,5	111	110	109,5	111	111	110	108,5	110	113	

On a regroupé ces données brutes dans le tableau suivant :

Longueur des pièces en <i>mm</i>	Nombre de pièces
[107; 108]	1
]108; 109]	5
]109; 110]	20
]110; 111]	18
]111; 112]	4
]112; 113]	2

- 1) a) Préciser la population étudiée, la variable étudiée et sa nature, la taille de l'échantillon.
b) Comment appelle-t-on ce type de tableau ? Que représente-t-il ?
c) Quelle procédure Excel permet de construire ce tableau à partir des données brutes observées ?

2) Pour la présentation des différents calculs effectués dans cette question, on construira dès le début un unique tableau présentant l'ensemble des résultats demandés ou utiles.

- a) Calculer les fréquences de la distribution et représenter graphiquement les résultats obtenus.
- b) Calculer les fréquences cumulées (croissantes) de la distribution et tracer le polygone des fréquences cumulées.
- c) En déduire par lecture graphique, puis par une formule d'interpolation linéaire, la valeur de la médiane et des quartiles de la distribution. Interpréter les résultats obtenus et les représenter graphiquement à l'aide d'une boîte à moustaches.
- d) Donner la moyenne et l'écart-type de la distribution. En déduire l'intervalle moyen et interpréter le résultat obtenu.

On suppose maintenant que la machine produit un très grand nombre de pièces, et que la longueur d'une pièce choisie au hasard dans la production est une variable aléatoire X de loi normale de moyenne 110 *mm* et d'écart-type 1 *mm*. Par ailleurs, une pièce est considérée comme correcte si sa longueur est comprise entre 109 et 111 *mm*, comme défectueuse (c'est-à-dire nécessitant d'être retravaillée) sinon.

- 3) a) Calculer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production soit défectueuse.
b) Comparer ce résultat avec la fréquence de pièces défectueuses dans le lot étudié dans les questions 1) et 2). Commenter.

4) On constitue un lot de 50 pièces choisies au hasard dans la production, et on désigne par Y le nombre de pièces défectueuses dans ce lot.

- Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ? Justifier la réponse de façon précise.
- Quel est le nombre moyen de pièces défectueuses dans un lot de 50 pièces ?
- Calculer la probabilité qu'un lot de 50 pièces contienne entre 10 et 20 pièces défectueuses :
 - en utilisant la loi de Y ;
 - en utilisant une loi approchée de Y (justifier son utilisation).

Exercice 2.

Une société veut vendre des machines destinées à certaines entreprises. Le prix de vente minimal est fixé à 10000 euros. Le nombre prévisible y de machines vendues est fonction du prix proposé x en milliers d'euros. Une enquête auprès de clients potentiels a donné les résultats suivants :

Prix proposé pour une machine : x_i	10	12,5	15	17,5	20	25
Nombre prévisible de machines vendues : y_i	100	85	62	42	28	11

- Préciser la population et la(es) variable(s) étudiée(s).
 - Représenter graphiquement le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, 6$. On prendra comme unité 1 cm pour 2,5 en abscisse et 1 cm pour 10 en ordonnées.
 - Donner une équation de la droite de régression de y en x obtenues par la méthode des moindres carrés. Construire cette droite sur le graphique du b).
 - Quel nombre de machines vendues peut-on envisager pour un prix de 30000 euros ?
 - Donner le coefficient de corrélation linéaire entre x et y . Interpréter le résultat obtenu. Que peut-on dire de la prévision effectuée au d) ?

2) On cherche à améliorer les résultats du 1), et pour cela, on pose $z = \ln\left(\frac{y}{x-6}\right)$.

- Calculer les valeurs $z_i = \ln\left(\frac{y_i}{x_i-6}\right)$.
- Donner une équation de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
- Donner le coefficient de corrélation linéaire entre x et z . Interpréter le résultat obtenu. A-t-on amélioré les résultats du 1) ?
- En déduire une nouvelle expression de y en fonction de x .
- Quel nombre prévisible de machines vendues peut-on maintenant envisager pour un prix de 30000 euros ? Comparer avec le résultat du 1)d).

Exercice 3.

Un dépistage systématique est effectué sur une population dont une partie des individus présentent une certaine maladie M non apparente. Ce dépistage commence par un test qui donne 95% de résultats positifs pour les personnes atteintes par M , et 10% des résultats positifs pour les personnes non atteintes.

On suppose de plus que $100p$ % des individus présentent la maladie M , avec p dans $]0, 1[$.

- Traduire les données de l'énoncé en terme de probabilité d'événements. Préciser l'expérience aléatoire considérée et proposer un espace probabilisé adapté à cette expérience.
- Calculer, en fonction de p , la probabilité qu'un individu choisi au hasard ait un test positif.
- Calculer la probabilité, notée $f(p)$, qu'un individu choisi au hasard ait la maladie M sachant que son test est positif.
 - Calculer la probabilité, notée $g(p)$, qu'un individu choisi au hasard n'ait pas la maladie M sachant que son test est négatif.
- Etudier les variations des fonctions f et g . Préciser leurs valeurs (éventuellement limite) en 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et 1. Commenter.
 - Démontrer que pour tout p dans $]0, 1[$, $f(p) \geq p$ et $g(p) \geq 1 - p$. Que signifient ces résultats ?

TABLE 1**Fonction de répartition
de la loi normale réduite**

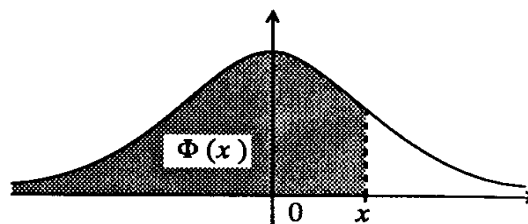
Si U suit la loi normale réduite, pour $x \geq 0$, la table donne la valeur :

$$\phi(x) = P(U \leq x).$$

La valeur x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Pour $x < 0$, on a :

$$\phi(x) = 1 - \phi(-x).$$



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0.0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0.1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0.2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0.3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0.4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0.5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0.6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0.7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0.8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0.9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1.0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1.1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1.2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1.3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1.4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1.5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1.6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1.7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1.8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1.9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2.0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2.1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2.2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2.3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2.4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2.5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2.6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2.7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2.8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2.9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6