

Licence mention Mathématiques - Deuxième année - Semestre 3  
 Statistiques  
 Partiel du mercredi 3 novembre 2004

Durée 2h00

Tout document interdit - Calculatrices autorisées

**Exercice 1.**

On a interrogé des étudiants à propos de leurs activités culturelles, et on leur a demandé quelle somme (en euros) ils dépensent chaque mois. Tous les étudiants interrogés ont répondu et on a obtenu la distribution statistique suivante :

Dépense mensuelle	Nombre d'étudiants
[0; 30]	18
]30; 80]	21
]80; 130]	8
]130; 150]	3

Pour la présentation des différents calculs effectués, on construira dès le début de l'exercice un unique tableau présentant l'ensemble des résultats demandés ou utiles.

- 1) Préciser la population étudiée, la variable étudiée et sa nature, la taille de l'échantillon.
- 2) a) Calculer les fréquences de la distribution et représenter graphiquement les résultats obtenus.  
 b) Préciser la classe modale de la distribution et interpréter le résultat obtenu.
- 3) a) Calculer les fréquences cumulées (croissantes) de la distribution et tracer le polygone des fréquences cumulées.  
 b) En déduire par lecture graphique, puis par une formule d'interpolation linéaire, la valeur de la médiane de la distribution. Interpréter le résultat obtenu.
- 4) Calculer la moyenne et l'écart-type de la distribution. En déduire l'intervalle moyen et interpréter le résultat obtenu.

**Exercice 2.**

Une statistique publiée en l'an 1998 donne le nombre d'abonnés à Internet dans le monde, à la fin de l'année indiquée :

Année	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année : $x_i$	0	1	2	3
Nombre d'abonnés en millions : $y_i$	26	55	101	150

- 1) Représenter graphiquement le nuage de points  $M_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . On prendra comme unité 1 cm pour 1 en abscisse et 1 cm pour 50 en ordonnées. Prévoir des graduations jusqu'à 500 sur l'axe des ordonnées.
- 2) a) Donner une équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$  obtenues par la méthode des moindres carrés. Construire cette droite sur le graphique du 1). Préciser les coordonnées du point moyen  $G$  du nuage et placer le point  $G$  sur le graphique du 1).  
 b) Calculer alors les prévisions  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  du nombre d'abonnés pour les années 1999, 2000 et 2001.  
 c) Donner le coefficient de corrélation linéaire entre  $x$  et  $y$ . Interpréter le résultat obtenu. Que peut-on dire des prévisions effectuées au b) ?
- 3) En l'an 2000, on a pu compléter la statistique précédente :

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Rang de l'année : $x_i$	0	1	2	3	4	5
Nombre d'abonnés en millions : $y_i$	26	55	101	150	248	407

- a) Placer les deux nouveaux points  $M_5$  et  $M_6$  sur le graphique du 1). L'ajustement affine effectué au 2) vous semble-t-il pertinent ? Justifier votre réponse.
- b) On pose  $z = \ln(y)$ . Calculer alors les valeurs  $z_i = \ln(y_i)$ .
- c) Donner une équation de la droite de régression de  $z$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés.
- d) Donner le coefficient de corrélation linéaire entre  $x$  et  $z$ . Interpréter le résultat obtenu.
- e) En déduire une expression de  $y$  en fonction de  $x$ , et représenter la fonction obtenue sur le graphique du 1).

- f) Calculer alors la nouvelle prévision  $\gamma'$  du nombre d'abonnés pour l'année 2001.
- 4) Dans cette question, on utilise la méthode d'ajustement dite de la droite de Mayer.  
On désigne par  $G_1$  le point moyen des trois premiers points  $M_1, M_2$  et  $M_3$ , et par  $G_2$  le point moyen des trois derniers points  $M_4, M_5$  et  $M_6$ .
- a) Déterminer les coordonnées des points  $G_1$  et  $G_2$ , et placer ces points sur la graphique du 1).
- b) Déterminer une équation de la droite  $(G_1G_2)$  sous la forme  $y = ax + b$ .
- c) Calculer alors la nouvelle prévision  $\gamma''$  du nombre d'abonnés pour l'année 2001.

### Exercice 3.

Un laboratoire a mis au point un alcootest. Les premiers essais ont conduit aux résultats suivants :

- lorsqu'une personne est réellement en état d'ébriété, l'alcootest se révèle positif 95 fois sur 100 ;
- lorsqu'une personne n'est pas en état d'ébriété, l'alcootest se révèle négatif 96 fois sur 100.

On suppose de plus que la proportion de personnes réellement en état d'ébriété est égale à  $p$ , avec  $p \in ]0, 1[$  (ce qui correspond à  $100p$  %).

La police contrôle une personne au hasard.

- 1) Traduire les données de l'énoncé en terme de probabilité d'événements.
- 2) Calculer, en fonction de  $p$ , la probabilité que la personne ait un alcootest positif.
- 3) Calculer la probabilité, notée  $f(p)$ , que la personne soit réellement en état d'ébriété lorsque l'alcootest est positif.
- 4) Etudier les variations de la fonction  $f$ . Préciser  $f(0)$ ,  $f(\frac{1}{2})$  et  $f(1)$ . Commenter.

### Exercice 4.

Le cours de Statistiques de deuxième année de Licence mention Mathématiques est suivi par 57 étudiants, dont 53 sont inscrits dans la mention Mathématiques, les autres étant inscrits dans une autre mention. Il est convenu que l'enseignant de Mathématiques responsable du cours sera le référent de 5 étudiants choisis au hasard parmi ces 57 étudiants.

On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre d'étudiants d'une autre mention dont l'enseignant sera référent.

- 1) Donner la loi de probabilité de  $X$ . Justifier votre réponse.
- 2) Calculer la probabilité que l'enseignant soit référent d'au moins deux étudiants d'une autre mention.

### Exercice 5.

Dans une usine, une machine met du riz en sachets. On suppose que le poids d'un sachet est une variable aléatoire de loi Normale de moyenne  $1,20$  kg et d'écart-type  $0,06$  kg. On choisit un sachet de riz au hasard.

- 1) a) Quelle est la probabilité que le sachet ait un poids compris entre  $1,14$  et  $1,29$  kg ?  
b) Vérifier que la probabilité que le sachet ait un poids inférieur à  $1,10$  kg est égale à  $0,0475$ .
- 2) Un magasin passe commande de 500 sachets de riz. Il est convenu que le magasin pourra refuser tout sachet ayant un poids inférieur à  $1,10$  kg.
  - a) Donner la loi de probabilité du nombre de sachets refusés par le magasin. Justifier votre réponse.
  - b) Quel est le nombre moyen de sachets refusés ?
  - c) Calculer la probabilité qu'il y ait entre 15 et 30 sachets refusés. On pourra utiliser un résultat d'approximation de loi, en précisant les conditions d'application.

**TABLE 1****Fonction de répartition  
de la loi normale réduite**

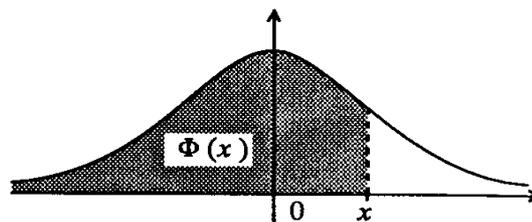
Si  $U$  suit la loi normale réduite, pour  $x \geq 0$ , la table donne la valeur :

$$\Phi(x) = P(U \leq x).$$

La valeur  $x$  s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Pour  $x < 0$ , on a :

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x).$$



$x$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6