

Licence mention Mathématiques - Deuxième année - Semestre 3
Statistiques
Partiel du lundi 6 novembre 2006

Durée 2h00

Tout document interdit - Calculatrices autorisées

Exercice 1.

Une machine produit plusieurs milliers de bouchons cylindriques par jour. On admet que la variable aléatoire X qui, à chaque bouchon, associe son diamètre exprimé en millimètres, suit la loi normale de moyenne $\mu = 22$ mm et d'écart-type $\sigma = 0,025$ mm.

Les bouchons sont acceptables si leur diamètre appartient à l'intervalle $[21,95; 22,05]$.

1) Quelle est la probabilité qu'un bouchon pris au hasard dans la production soit acceptable ?

2) Dans cette question, on considère que la probabilité qu'un bouchon soit défectueux est $p = 0,05$. On prélève au hasard un échantillon de 80 bouchons dans la production d'un jour. On nomme Y la variable aléatoire égale au nombre de bouchons défectueux d'un tel échantillon.

a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ? Justifier la réponse.

b) Calculer la probabilité que l'échantillon prélevé contienne exactement 6 bouchons défectueux.

c) Donner l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y .

d) On veut approcher Y par une variable aléatoire Y_1 qui suit une loi de Poisson de paramètre λ .

Quelle doit être la valeur du paramètre λ ? Calculer alors une valeur approchée de la probabilité que l'échantillon prélevé contienne exactement 6 bouchons défectueux. Comparer avec le résultat du b).

3) En vue du contrôle de réglage de la machine, on prélève régulièrement dans la production des échantillons de 100 bouchons. On appelle \bar{X} la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 bouchons, associe le diamètre moyen des bouchons de cet échantillon.

On admet que, lorsque la machine est bien réglée, \bar{X} suit la loi normale de paramètres 22 et 0,0025.

a) Déterminer le réel a (valeur approchée à 10^{-4} près) tel que $P(22 - a \leq \bar{X} \leq 22 + a) = 0,95$.

b) Sur un échantillon de 100 bouchons, on a obtenu les résultats suivants :

Diamètre des bouchons en mm	Nombre de bouchons
$[21,93; 21,95]$	3
$]21,95; 21,97]$	7
$]21,97; 21,99]$	27
$]21,99; 22,01]$	30
$]22,01; 22,03]$	24
$]22,03; 22,05]$	7
$]22,05; 22,07]$	2

Préciser la population étudiée, la variable étudiée et sa nature, la taille de l'échantillon.

Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la moyenne et l'écart-type de la distribution. Préciser les données à partir desquelles ces valeurs ont été obtenues.

c) A partir des résultats obtenus sur la moyenne aux questions a) et b), peut-on considérer que la machine est bien réglée ?

4) On poursuit l'étude des résultats présentés dans le tableau de la question 3)b). Pour la présentation des différents calculs effectués dans cette question 4), on construira dès le début un unique tableau présentant l'ensemble des résultats demandés ou utiles.

- a) Représenter graphiquement les résultats présentés dans le tableau.
- b) Calculer les fréquences cumulées (croissantes) de la distribution et tracer le polygone des fréquences cumulées.
- c) En déduire par lecture graphique, puis par une formule d'interpolation linéaire, la valeur de la médiane et des quartiles de la distribution. Interpréter les résultats obtenus et les représenter graphiquement à l'aide d'une boîte à moustaches.

Exercice 2.

Une entreprise fabrique des chaudières. Le nombre de chaudières fabriquées lors des années précédentes est donné par le tableau suivant :

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre (en milliers) de chaudières fabriquées : y_i	15,35	15,81	16,44	16,75	17,19	17,30

- 1) Préciser la population et la(es) variable(s) étudiée(s).
- 2) Donner une équation de la droite de régression de y en x obtenues par la méthode des moindres carrés.
- 3) Donner le coefficient de corrélation linéaire entre x et y . Interpréter le résultat obtenu.
- 4) Quel est le nombre prévisible de chaudières qui seront fabriquées l'année de rang 7 ? Cette prévision est-elle fiable ?

Exercice 3.

Au sujet du référendum sur la constitution européenne de mai 2005, deux semaines avant le scrutin, on pouvait lire dans un journal gratuit à propos de ses lecteurs :

- 73% des personnes ont pris leur décision qui est : oui pour 48,45% et non pour 51,55% ;
- 27% n'ont pas pris de décision mais se répartissent en trois catégories : 31% pensent voter oui, 24% pensent voter non et 45% ne savent vraiment pas.

On choisit une personne au hasard.

- 1) Traduire les données de l'énoncé en terme de probabilité d'événements. Préciser l'expérience aléatoire considérée et proposer un espace probabilisé adapté à cette expérience.
- 2) Quelle est la probabilité que la personne choisie penche pour le oui ? pour le non ?
- 3) Si la personne choisie penche pour le oui, quelle est la probabilité qu'elle ait pris sa décision ?

Exercice 4.

Un contrôleur des Transports Communs Aménois passe chaque jour dans les bus pour contrôler le titre de transport des passagers. A chaque voyageur contrôlé, la probabilité de dresser un procès verbal est égale à 0,10. On suppose que les voyageurs se comportent de façon indépendante.

- 1) On suppose que n voyageurs sont contrôlés, avec n entier naturel non nul, et on désigne par X_n la variable aléatoire égale au nombre de procès verbaux établis.
 - a) Quelle est la loi de probabilité de X_n ? Justifier la réponse.
 - b) Calculer la probabilité p_n qu'au moins un procès verbal soit établi.
 - c) Déterminer le nombre minimum de contrôles à effectuer pour que l'on ait $p_n \geq 0,99$.
- 2) Sur une période donnée, 4 voyageurs sont contrôlés. Calculer la probabilité qu'au moins la moitié des voyageurs aient un procès verbal.
- 3) Dans le premier bus de la journée, le contrôleur se fixe pour objectif de dresser au moins 2 procès verbaux et de contrôler au moins 5 passagers en règle. Quelle est la probabilité que ce résultat ne soit pas encore atteint au vingtième passager contrôlé ?

TABLE 1**Fonction de répartition
de la loi normale réduite**

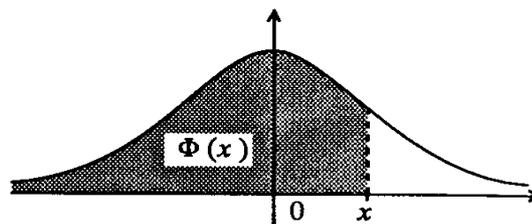
Si U suit la loi normale réduite, pour $x \geq 0$, la table donne la valeur :

$$\phi(x) = P(U \leq x).$$

La valeur x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Pour $x < 0$, on a :

$$\phi(x) = 1 - \phi(-x).$$



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6