

Licence mention Mathématiques - Semestre 3

Statistique

Examen de lundi 20 février 2017

Durée 2h00

Tout document interdit - Calculatrices autorisées

Exercice 1.

0) Dans une population donnée, on considère un caractère qualitatif à deux modalités A et B, représenté par une variable aléatoire X de loi de Bernoulli de paramètre p , où p est la proportion d'individus ayant la modalité A dans la population, avec $p \in]0; 1[$. On considère un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de taille n de X , où n est un entier

naturel tel que $np \geq 10$ et $n(1 - p) \geq 10$. On désigne par $F = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ la fréquence d'échantillon. Soit $\alpha \in]0; 1[$.

a) On suppose dans cette question que p est connu. Déterminer, en détaillant les calculs, un intervalle de fluctuation de F (autour de p) au niveau $1 - \alpha$. Expliquer ce que signifie le résultat obtenu.

b) On suppose dans cette question que p est inconnu. Déterminer, en détaillant les calculs, un intervalle de confiance de p au niveau $1 - \alpha$. Expliquer ce que signifie le résultat obtenu.

1) Le baromètre du risk management 2011 Protiviti - TNS Sofres a été réalisé auprès d'un échantillon aléatoire de 100 directeurs financiers d'entreprises cotées et de 100 directeurs financiers d'entreprises non cotées. Cette étude indique que 34 des directeurs financiers d'entreprises cotées et 22 des directeurs financiers d'entreprises non cotées considèrent que l'environnement juridique représente un risque majeur.

a) Déterminer un intervalle de confiance au niveau 95% de la proportion des directeurs financiers d'entreprises cotées qui ont cette opinion.

b) De façon analogue, donner (sans détailler les calculs) un intervalle de confiance au niveau 95% de la proportion des directeurs financiers d'entreprises non cotées qui ont cette opinion.

c) Peut-on déduire de ces deux intervalles qu'il y a une différence d'opinion entre les directeurs financiers des deux types d'entreprises ? Justifier la réponse.

d) Effectuer un test statistique au risque 5%, puis 10%, pour savoir si l'on peut considérer qu'il y a une différence d'opinion entre les directeurs financiers des deux types d'entreprises. En cas de décisions contradictoires avec les deux risques 5% et 10%, préciser et justifier la décision à retenir.

2) Le baromètre Carrefour Property - TNS Sofres de mai 2011 a mesuré les attentes des populations urbaines en France concernant leur centre-ville sur un échantillon aléatoire de 556 personnes. Parmi les personnes interrogées, 284 ont répondu que leur centre-ville s'était beaucoup dynamisé au cours des dernières années.

Effectuer un test statistique au risque 5% pour savoir si l'on peut considérer que cette opinion est majoritaire dans la population.

Exercice 2

On s'intéresse au poids des bébés de neuf mois.

1) On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque bébé de neuf mois, associe son poids, et on suppose dans cette question que X suit la loi normale de moyenne 8 kg et d'écart type 1 kg.

a) Calculer la probabilité qu'un bébé de neuf mois choisi au hasard au hasard pèse entre 6,5 et 9,5 kg.

b) Quel est l'intervalle de la forme $[8 - h; 8 + h]$ dans lequel on trouve le poids de 95 % des bébés ?

2) On a mesuré le poids de dix bébés de neufs mois. Voici les données obtenues (en kg) :

8,0 ; 8,7 ; 9,3 ; 8,9 ; 8,5 ; 6,3 ; 9,1 ; 7,3 ; 7,4 ; 8,0.

a) Préciser la population et la variable étudiées, la taille d'échantillon, le(s) estimateur(s) mis en jeu et leur loi. Préciser l'hypothèse à faire sur la variable étudiée pour pouvoir répondre aux questions c) à e) suivantes.

b) Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart-type du poids des bébés de 9 mois.

c) En déduire un intervalle de confiance au niveau 95% du poids moyen des bébés de 9 mois.

d) Effectuer un test statistique pour savoir si on peut considérer, au risque 5%, que le poids moyen d'un bébé de neuf mois est supérieur à 7,5 kg ?

e) Que dire au risque 5% de l'hypothèse faite par les médecins que le poids moyen d'un bébé de neuf mois est égal à 8,5 kg ?

3) En utilisant le logiciel R, on a obtenu les résultats suivants :

```
> poids=c(8.0,8.7,9.3,8.9,8.5,6.3,9.1,7.3,7.4,8.0)
> mean(poids)
[1] 8.15
> var(poids)
[1] 0.885
> shapiro.test(poids)
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data: poids
W = 0.9431, p-value = 0.5884
```

```
> t.test(poids,mu=7.5,alternative="greater")
```

One Sample t-test

```
data: poids
t = 2.185, df = 9, p-value = 0.02836
alternative hypothesis: true mean is greater than
95 percent confidence interval:
 7.604668      Inf
sample estimates:
mean of x
 8.15
```

a) Expliquer ce que réalisent les instructions saisies et indiquer ce que représentent les valeurs calculées.

b) Pour chacun des deux tests statistiques mis en oeuvre, préciser les hypothèses H_0 et H_1 puis donner, en justifiant, le résultat au risque 5%.

c) Le résultat du premier test remet-il en cause l'hypothèse faite dans la question 2) a) ? Justifier la réponse.

d) Le résultat du deuxième test est-il conforme à celui de la question 2) d) ? Justifier la réponse.

Exercice 3

On a donné à 6 volontaires un médicament A contre la migraine et observé le temps nécessaire pour avoir disparition de la douleur :

Sujet	1	2	3	4	5	6
Temps (en min)	15	27	38	19	45	8

A ces mêmes individus, lors de nouvelles migraines, on a administré un autre médicament B contre la migraine et observé le temps nécessaire pour avoir disparition de la douleur :

Sujet	1	2	3	4	5	6
Temps (en min)	10	21	30	12	45	10

On suppose que les temps nécessaires pour avoir disparition de la douleur suivent des lois normales.

1) Peut-on considérer, au risque 5%, que le médicament B a une action plus rapide que le médicament A ?

2) Le résultat est-il le même au risque 10 % ? En cas de décisions contradictoires avec les risques 5 % et 10 %, préciser et justifier la décision à retenir.

3) En utilisant le logiciel R, on a obtenu les résultats suivants :

```
> medA=c(15,27,38,19,45,8)
> medB=c(10,21,30,12,45,10)
> shapiro.test(medA)

      Shapiro-Wilk normality test

data:  medA
W = 0.9606, p-value = 0.8244

> shapiro.test(medB)

      Shapiro-Wilk normality test

data:  medB
W = 0.8536, p-value = 0.1682

> t.test(medA,medB,paired=T,alternative="greater")

      Paired t-test

data:  medA and medB
t = 2.4194, df = 5, p-value = 0.03008
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
95 percent confidence interval:
 0.6685617      Inf
sample estimates:
mean of the differences
              4
```

Les résultats obtenus sont-ils conformes à ceux obtenus dans les questions 1) et 2) ? Justifier la réponse.

4) En utilisant le logiciel R, on a obtenu les résultats suivants :

```
> var.test(medA,medB)

      F test to compare two variances

data:  medA and medB
F = 1.0184, num df = 5, denom df = 5, p-value = 0.9845
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.1425029 7.2777313
sample estimates:
ratio of variances
          1.01838

> t.test(medA,medB,var.equal=T,alternative="greater")

      Two Sample t-test

data:  medA and medB
t = 0.4928, df = 10, p-value = 0.3164
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
95 percent confidence interval:
 -10.7121      Inf
sample estimates:
mean of x mean of y
 25.33333  21.33333
```

a) Dans quelle situation aurait-il été utile de réaliser ces deux tests ?

b) Le résultat du deuxième test est-il le même que celui du test réalisé dans la question 1) ? Justifier.

Exercice 4

Pour étudier le comportement alimentaire de deux espèces de fourmis, *Lasius niger* et *Lasius flavus*, Saad (1976) a conçu le dispositif expérimental suivant.

Six chambres, pourvues d'un tampon qui assure 90% d'humidité relative, sont disposées en rayon autour d'un promenoir central circulaire. Un gramme d'aliment à tester était placé au centre de chaque chambre et le même aliment se retrouvait dans deux chambres diamétralement opposées. Trois sucres ont été testés : le glucose, le galactose et le lévulose.

Le premier jour de l'expérience, à 8 heures du matin, 20 ouvrières d'une des deux espèces étaient introduites dans le promenoir et pendant 5 jours consécutifs, le nombre et l'emplacement des fourmis dans les diverses chambres ont été notés à 8 heures et à 16 heures. L'expérience a été répétée 5 fois pour chaque espèce et à la fin de chaque expérience, le poids du sucre non emporté a été vérifié.

La répartition de *Lasius* durant les 5 expériences de 5 jours a été la suivante :

Glucose : 255 fourmis observées.

Galactose : 325 fourmis observées.

Lévulose : 200 fourmis observées.

On sait que la répartition des fourmis dans les chambres est uniforme si le même sucre est déposé dans chacune des 6 chambres.

1) Effectuer un test statistique au risque 5% pour savoir si on peut considérer qu'elle l'est encore si trois sucres différents sont utilisés ?

2) En utilisant le logiciel R, on a obtenu les résultats suivants :

```
> obs=c(255,325,200)
> theo=c(1/3,1/3,1/3)
> chisq.test(obs,p=theo)

Chi-squared test for given probabilities

data:  obs
X-squared = 30.1923, df = 2, p-value = 2.779e-07
```

Les résultats obtenus sont-ils conformes à ceux obtenus dans la question 1) ? Justifier la réponse.

Exercice 5

La distance d'arrêt d'un véhicule est égale à la distance de réaction (distance parcourue entre le moment où le conducteur perçoit un obstacle et celui où il appuie sur la pédale de frein) augmentée du chemin de freinage (distance parcourue entre le début du freinage et l'arrêt total). Le tableau suivant fournit, pour 12 vitesses x exprimées en km/h, le chemin de freinage y mesuré en mètres.

x	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
y	9	11	20	27	39	45	58	78	79	93	108	124

1) Vérifier graphiquement que l'on peut admettre l'existence d'une relation affine entre la vitesse et le chemin de freinage.

2) En supposant que les hypothèses du cours sont satisfaites, estimer les paramètres de la droite de régression de Y en X :

a) ponctuellement ;

b) par des intervalles de confiance au niveau 0,95.

3) Déterminer un intervalle de prévision au niveau 0,95 pour le chemin de freinage à une vitesse de 170 km/h.

4) La corrélation observée est-elle significativement différente de 0 ?

Formulaire de Statistique Inférentielle

1) Estimateurs

Paramètre	Estimateur	Statistique et sa loi
μ	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$	$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}} : \begin{cases} \text{Student à } n - 1 \text{ d.d.l.} \\ \text{si échantillon gaussien} \end{cases}$
σ^2	$S_c^2 = \frac{n}{n-1} S^2$, avec $S^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - (\bar{X})^2$	$Y^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} S_c^2 : \begin{cases} \text{Khi deux à } n - 1 \text{ d.d.l.} \\ \text{si échantillon gaussien} \end{cases}$
p	$F = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$	$U = \frac{F - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} : \begin{cases} \text{Normale } \mathcal{N}(0; 1) \text{ (approx.)} \\ \text{si } np \geq 10 \text{ et } n(1-p) \geq 10 \end{cases}$

2) Intervalles de confiance au niveau $1 - \alpha$

Paramètre	Intervalle de confiance	Valeurs tabulées
μ	$i_\mu = \left[\bar{x} - \frac{S_c}{\sqrt{n}} t_\alpha, \bar{x} + \frac{S_c}{\sqrt{n}} t_\alpha \right]$	t_α tel que $P(-t_\alpha < T < t_\alpha) = 1 - \alpha$
σ^2	$i_{\sigma^2} = \left[\frac{n-1}{b_\alpha} S_c^2, \frac{n-1}{a_\alpha} S_c^2 \right]$	a_α et b_α tels que $\begin{aligned} P(Y^2 \geq a_\alpha) &= 1 - \frac{\alpha}{2} \\ P(Y^2 \geq b_\alpha) &= \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$
p	$i_p = \left[f - \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}} u_\alpha, f + \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}} u_\alpha \right]$	u_α tel que $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1 - \alpha$

3) Tests de conformité au risque α

H_0	H_1	Statistique de test	Valeur(s) test(s)
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}}$	t_α tel que $P(-t_\alpha < T < t_\alpha) = 1 - \alpha$ t'_α tel que $P(T < t'_\alpha) = 1 - \alpha$, i.e. $t'_\alpha = t_{2\alpha}$ t''_α tel que $P(T \geq t''_\alpha) = 1 - \alpha$, i.e. $t''_\alpha = t_{2-2\alpha} = -t_{2\alpha}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$Y^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2} S_c^2$	a_α et b_α tels que $P(a_\alpha < Y^2 < b_\alpha) = 1 - \alpha$ b'_α tel que $P(Y^2 \geq b'_\alpha) = \alpha$, i.e. $b'_\alpha = b_{2\alpha}$ a''_α tel que $P(Y^2 \geq a''_\alpha) = 1 - \alpha$, i.e. $a''_\alpha = a_{2\alpha}$
$p = p_0$	$p \neq p_0$ $p > p_0$ $p < p_0$	$U = \frac{F - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	u_α tel que $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1 - \alpha$ u'_α tel que $P(U < u'_\alpha) = 1 - \alpha$, i.e. $u'_\alpha = u_{2\alpha}$ u''_α tel que $P(U \geq u''_\alpha) = 1 - \alpha$, i.e. $u''_\alpha = -u_{2\alpha}$

Pour un intervalle de confiance de μ et/ou un test de conformité sur μ avec un grand échantillon (quelconque), on peut approcher la loi de Student par la loi Normale $\mathcal{N}(0; 1)$, et remplacer t_α , t'_α et t''_α par u_α , u'_α et u''_α .

4) Tests d'homogénéité au risque α

H_0	H_1	Statistique de test et sa loi sous l'hypothèse H_0	Valeur(s) test(s)
$\sigma_1 = \sigma_2$	$\sigma_1 \neq \sigma_2$	$F = \frac{S_{c,1}^2}{S_{c,2}^2}$: Snédécour à $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ d.d.l. si échantillons indépendants gaussiens	f_α tel que $P(F \geq f_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$ en travaillant avec $f \geq 1$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$U = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{S_{c,1}^2}{n_1} + \frac{S_{c,2}^2}{n_2}\right)}}$: Normale $\mathcal{N}(0; 1)$ (approx.) si grands échantillons indépendants	u_α u'_α u''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_{c,1,2} \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$: Student à $n_1 + n_2 - 2$ d.d.l. (approx.) si petits échantillons indép. gaussiens et si $\sigma_1 = \sigma_2$ avec $s_{c,1,2}^2 = \frac{(n_1-1)s_{c,1}^2 + (n_2-1)s_{c,2}^2}{n_1+n_2-2}$	t_α t'_α t''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$U = \frac{\bar{D}}{\frac{S_{c,d}}{\sqrt{n}}}$, où $D = X_1 - X_2$: Normale $\mathcal{N}(0; 1)$ (approx.) si grands échantillons appariés	u_α u'_α u''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$T = \frac{\bar{D}}{\frac{S_{c,d}}{\sqrt{n}}}$, où $D = X_1 - X_2$: Student à $n - 1$ d.d.l. si petits échantillons appariés gaussiens	t_α t'_α t''_α
$p_1 = p_2$	$p_1 \neq p_2$ $p_1 > p_2$ $p_1 < p_2$	$U = \frac{F_1 - F_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)f_{1,2}(1 - f_{1,2})}}$: Normale $\mathcal{N}(0; 1)$ (approx.) si $n_1 f_1 \geq 5, n_1(1 - f_1) \geq 5,$ $n_2 f_2 \geq 5, n_2(1 - f_2) \geq 5,$ avec $f_{1,2} = \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2}$	u_α u'_α u''_α

5) Test d'ajustement à une loi théorique à r modalités au risque α

Hypothèse H_0 : le caractère suit la loi théorique définie par les probabilités p_i .

Hypothèse H_1 : $\overline{H_0}$.

Statistique de test : $D = \sum_{i=1}^r \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$.

Loi de D sous l'hypothèse H_0 : khi deux à $r - 1 - k$ d.d.l.

Valeur test : b_α tel que $P(D \geq b_\alpha) = \alpha$.

6) Test d'indépendance entre deux caractères à r et s modalités au risque α

Hypothèse H_0 : les deux caractères sont indépendants.

Hypothèse H_1 : $\overline{H_0}$.

Statistique de test : $D = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(N_{ij} - np_{ij})^2}{np_{ij}}$, avec $np_{ij} = \frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n}$, $n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^s n_{ij}$ et $n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^r n_{ij}$.

Loi de D sous l'hypothèse H_0 : khi deux à $(r - 1)(s - 1)$ d.d.l.

Valeur test : b_α tel que $P(D \geq b_\alpha) = \alpha$.

7) Régression linéaire simple

On considère deux variables quantitative X et Y et le modèle de régression $Y = \alpha X + \beta + \varepsilon$, où ε suit la loi normale $\mathcal{N}(0; \sigma)$. On désigne par $\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .

Droite des moindres carrés de y en x .

Droite d'équation $y = ax + b$, avec $a = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x^2}$, $b = \bar{y} - a\bar{x}$,

et coefficient de corrélation linéaire r entre x et y avec : $r = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x s_y}$

où $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, $s_x^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \bar{x}^2$, $s_y^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - \bar{y}^2$ et $\text{cov}(x, y) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \bar{x}\bar{y}$.

Effectuant plusieurs expériences, et ainsi plusieurs échantillonnages, a , b et r apparaissent comme les valeurs observées des variables aléatoires A , B et R .

On a alors $E(A) = \alpha$, $E(B) = \beta$ et $E(R) \simeq \rho + \frac{\rho(1 - \rho^2)}{2(n - 1)}$. Des estimations ponctuelles de α , β , σ^2 et ρ sont alors respectivement a , b , $s_R^2 = \frac{n}{n - 2} (1 - r^2) s_y^2$ et r (ou plus précisément $r + \frac{r(1 - r^2)}{2(n - 3)}$).

Intervalle de confiance et tests pour un coefficient de régression linéaire α

La situation est celle décrite dans le paragraphe 1.

La variance de A est égale à $\frac{\sigma^2}{ns_x^2}$, et peut être estimée par $s_A^2 = \frac{s_R^2}{ns_x^2}$. La variable aléatoire $T = \frac{A - \alpha}{s_A}$ suit la loi de Student à $n - 2$ degrés de liberté. On détermine alors le réel t_{α_1} tel que $P(-t_{\alpha_1} < T < t_{\alpha_1}) = 1 - \alpha_1$ (table 3). On en déduit un intervalle de confiance de α au niveau $1 - \alpha_1$:

$$i_\alpha = [a - s_A t_{\alpha_1}, a + s_A t_{\alpha_1}].$$

Test (bilatéral) de $H_0 : \alpha = \alpha_0$ contre $H_1 : \alpha \neq \alpha_0$.

On calcule $t = \frac{a - \alpha_0}{s_A}$ et on décide que :

- si $t \in]-t_{\alpha_1}, t_{\alpha_1}[$, alors on ne peut rejeter H_0 ;

- si $t \notin]-t_{\alpha_1}, t_{\alpha_1}[$, alors on rejette H_0 avec une probabilité α_1 de se tromper.

Cas de β . On peut mener une étude analogue pour β en utilisant le fait que la variance de B est égale à $\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{ns_x^2} \right)$, et peut être estimée par $s_B^2 = s_R^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{ns_x^2} \right) = \frac{s_R^2}{n^2 s_x^2} \sum_{i=1}^n x_i^2$, et que la variable aléatoire $T = \frac{B - \beta}{s_B}$ suit la loi de Student à $n - 2$ degrés de liberté.

Prévision. L'ajustement affine peut servir à prévoir la valeur attendue pour Y quand l'expérimentateur fixe $X = x_0$. L'estimation ponctuelle de cette valeur est $\hat{y}_0 = ax_0 + b$, et un intervalle de confiance de cette valeur au niveau $1 - \alpha_1$: $i_{y_0} = \left[\hat{y}_0 - t_{\alpha_1} \sqrt{s_R^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{ns_x^2} \right)}, \hat{y}_0 + t_{\alpha_1} \sqrt{s_R^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{ns_x^2} \right)} \right]$.

Intervalle de confiance et tests pour un coefficient de corrélation

Soit ζ le nombre défini par $\zeta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right) = \text{argth} \rho$.

Soit Z la variable aléatoire qui au cours de chaque échantillonnage prend la valeur $z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + r}{1 - r} \right) = \text{argthr}$. Lorsque n est assez grand ($n \geq 20$ en pratique), un intervalle de confiance de ζ au niveau $1 - \alpha$:

$$i_\zeta = \left[z - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n - 3}}, z + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n - 3}} \right] = [z_1, z_2].$$

D'où un intervalle de confiance de ρ au niveau $1 - \alpha$: $i_\rho = [r_1, r_2] = [\text{th} z_1, \text{th} z_2]$.

Test de $H_0 : \rho = 0$ contre $H_1 : \rho \neq 0$.

Sous l'hypothèse H_0 , $T = \frac{R\sqrt{n - 2}}{\sqrt{1 - R^2}}$ suit la loi de Student à $n - 2$ degrés de liberté. On calcule $t = \frac{r\sqrt{n - 2}}{\sqrt{1 - r^2}}$:

- si $t \in]-t_\alpha, t_\alpha[$, alors on ne peut rejeter H_0 ;

- si $t \notin]-t_\alpha, t_\alpha[$, alors on rejette H_0 avec une probabilité α de se tromper.

TABLE 1

Fonction de répartition de la loi normale réduite

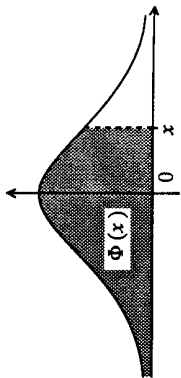
Si U suit la loi normale réduite, pour $x \geq 0$, la table donne la valeur :

$$\phi(x) = P(U \leq x).$$

La valeur x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Pour $x < 0$, on a :

$$\phi(x) = 1 - \phi(-x).$$



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

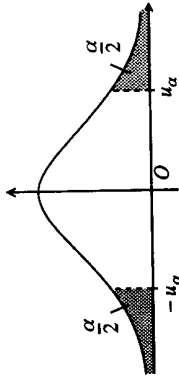
TABLE 2

Loi normale réduite (table de l'écart réduit)

Si U est une variable aléatoire qui suit la loi normale réduite, la table donne, pour α choisi, la valeur u_α telle que :

$$P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha.$$

La valeur α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

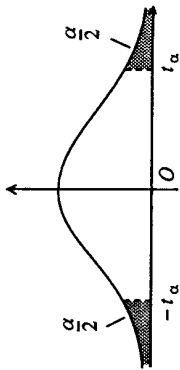


α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,3	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,5	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,6	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,7	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,8	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,9	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

TABLE 3

Lois de Student

Si T est une variable aléatoire qui suit la loi de Student à v degrés de liberté, la table donne, pour α choisi, le nombre t_α tel que $P(T \geq t_\alpha) = \alpha$.



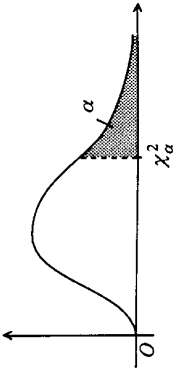
α v	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,681	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,679	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,677	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,674	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Lorsque le degré de liberté est infini, il s'agit du nombre u_α correspondant à la loi normale centrée réduite (cf. table 2).

TABLE 4

Lois de Pearson ou lois du χ^2

Si Y^2 est une variable aléatoire qui suit la loi du χ^2 à v degrés de liberté, la table donne, pour α choisi, le nombre χ_α^2 tel que $P(Y^2 \geq \chi_\alpha^2) = \alpha$.



α v	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,000 2	0,001	0,004	0,016	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,13
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,67	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,84	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,80	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,32
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,61	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,41	39,37	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,88	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,57	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

Lorsque le degré de liberté v est tel que $v > 30$, la variable aléatoire :

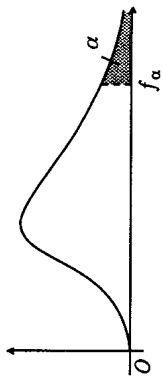
$$U = \sqrt{2Y^2} - \sqrt{2v - 1}$$

suit à peu près la loi normale réduite.

TABLE 5

Lois de Snédécór ($\alpha = 0,025$)

Si F est une variable aléatoire qui suit la loi de Snédécór à (v_1, v_2) degrés de liberté, la table donne le nombre f_α tel que $P(F \geq f_\alpha) = \alpha = 0,025$.

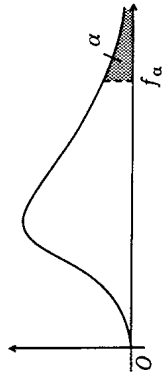


$v_1 \backslash v_2$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	648	800	864	900	922	937	957	969	985	993	1001	1018
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	8,98	8,84	8,66	8,56	8,46	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,76	6,62	6,43	6,33	6,23	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,60	5,46	5,27	5,17	5,07	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,90	4,76	4,57	4,47	4,36	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,43	4,30	4,10	4,00	3,89	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,10	3,96	3,77	3,67	3,56	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,85	3,72	3,52	3,42	3,31	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,66	3,53	3,33	3,23	3,12	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,51	3,37	3,18	3,07	2,96	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,39	3,25	3,05	2,95	2,84	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,29	3,15	2,95	2,84	2,73	2,49
15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,20	3,06	2,86	2,76	2,64	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,12	2,99	2,79	2,68	2,57	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,06	2,92	2,72	2,62	2,50	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,01	2,87	2,67	2,56	2,44	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	2,96	2,82	2,62	2,51	2,39	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	2,91	2,77	2,57	2,46	2,35	2,09
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,84	2,70	2,50	2,39	2,27	2,00
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,78	2,64	2,44	2,33	2,21	1,94
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,73	2,59	2,39	2,28	2,16	1,88
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,69	2,55	2,34	2,23	2,11	1,83
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,65	2,51	2,31	2,20	2,07	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,53	2,39	2,18	2,07	1,94	1,64
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,67	2,46	2,32	2,11	1,99	1,87	1,55
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,41	2,27	2,06	1,94	1,82	1,48
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,36	2,21	2,00	1,88	1,75	1,40
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,32	2,18	1,97	1,85	1,71	1,35
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,19	2,05	1,83	1,71	1,57	1,00

TABLE 6

Lois de Snédécór ($\alpha = 0,05$)

Si F est une variable aléatoire qui suit la loi de Snédécór à (v_1, v_2) degrés de liberté, la table donne le nombre f_α tel que $P(F \geq f_\alpha) = \alpha = 0,05$.



$v_1 \backslash v_2$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	242	246	248	250	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,85	2,72	2,65	2,57	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,62	2,54	2,47	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,67	2,53	2,46	2,38	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39	2,31	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28	2,19	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,45	2,31	2,23	2,15	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19	2,11	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,38	2,23	2,16	2,07	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,84
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,30	2,15	2,07	1,98	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,25	2,11	2,03	1,94	1,73
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,22	2,07	1,99	1,90	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,19	2,04	1,96	1,87	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	2,03	1,87	1,78	1,69	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65	1,39
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,95	1,79	1,70	1,60	1,32
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,03	1,93	1,77	1,68	1,57	1,28
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,83	1,67	1,57	1,46	1,00