Université de Picardie Jules Verne **2014-2015**
UFR des Sciences

Licence mention Mathématiques - Semestre 3
Statistique
Examen de lundi 2 mars 2015
Durée 2h00
Tout document interdit - Calculatrices autorisées

Exercice 1

1) Dans une population donnée, on considère un caractère quantitatif, représenté par une variable aléatoire X d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ. On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de taille n de X, et les estimateurs $\overline{X}$ et S_c (de μ et σ) dont la définition est rappelée dans le formulaire joint. Soit un réel $\alpha \in \,]0;1[$.

a) On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$. Déterminer, en détaillant les calculs, un intervalle de confiance de μ au niveau $1-\alpha$. Expliquer ce que signifie le résultat obtenu.

b) On suppose que $n \geq 30$. Quelle hypothèse sur X peut-on supprimer ? Donner alors (sans calcul) un intervalle de confiance de μ au niveau $1-\alpha$.

2) On a observé les teneurs en nitrates suivantes (en milligrammes de NO_3 par litre) des eaux de 30 sources d'une région donnée. Ces données proviennent de Demarets, 1992. Les données sont présentées dans le tableau suivant :

37	21	0	19	1	5	0	13	1	20	34	19	17	74	28
34	61	15	35	55	28	10	69	48	63	8	18	34	18	90

a) Préciser population et caractère étudiés, taille d'échantillon, estimateur(s) mis en jeu et leur loi.

b) A l'aide du logiciel R, on a obtenu le résultat suivant :

```
> nitrates<-c(37,21,0,19,1,5,0,13,1,20,34,19,17,74,28,
+ 34,61,15,35,55,28,10,69,48,63,8,18,34,18,90)
> shapiro.test(nitrates)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  nitrates
W = 0.9137, p-value = 0.01847
```

Préciser les hypothèses H_0 et H_1 du test statistique mis en oeuvre, puis donner, en justifiant, le résultat du test et conclure au risque 5%.

c) Déterminer une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart-type de la teneur en nitrates.

d) Déterminer un intervalle de confiance au niveau 95% de la teneur moyenne en nitrates d'une source.

e) Effectuer un test statistique au risque 5% pour savoir si, en moyenne, la teneur en nitrates des eaux de source de la région considérée dépasse la norme de 25 mg/l.

f) Le résultat du e) pouvait-il être obtenu directement à partir du résultat du d) ? Justifier la réponse.

Exercice 2

Une étude statistique a été menée pour savoir si la marque de dentifrice LARO D se vendait autant dans la Picardie que dans le reste de la France.

Sur 2000 personnes interrogées dans la Picardie, 1040 disent acheter la marque LARO D. Sur 1500 personnes interrogées dans le reste de la France, 615 disent acheter la marque LARO D.

1) a) Déterminer un intervalle de confiance au niveau 95% de la proportion d'acheteurs de la marque LARO D dans la Picardie, puis un intervalle de confiance au niveau 95% de la proportion d'acheteurs de la marque LARO D dans le reste de la France.

b) Ces intervalles de confiance permettent-ils de conclure ? Justifier la réponse.

c) Effectuer un test statistique au risque 5% pour savoir si on peut considérer que les parts de marché de la marque LARO D sont les mêmes dans la Picardie que dans le reste de la France.

2) En utilisant le logiciel R, on a obtenu les résultats suivants :

```
> LARO_D = matrix(c(1040,960,615,885),nrow=2,byrow=T)
> rownames(LARO_D) = c("Picardie","France")
> colnames(LARO_D) = c("Achat","Pas d'achat")
> LARO_D
         Achat Pas d'achat
Picardie  1040         960
France     615         885
> chisq.test(LARO_D)$expected
            Achat Pas d'achat
Picardie 945.7143   1054.2857
France   709.2857    790.7143
> chisq.test(LARO_D)

        Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction

data:  LARO_D
X-squared = 41.1682, df = 1, p-value = 1.397e-10
```

a) Expliquer ce que réalisent les instructions saisies.

b) Préciser les hypothèses H_0 et H_1 du test statistique mis en oeuvre, puis donner, en justifiant, le résultat du test et conclure au risque 5%.

c) Ce résultat est-il cohérent avec celui du 1) c) ? Jusitifer la réponse.

Exercice 3

Les données ci-contre correspondent à une expérience où 4 dentifrices (D1, D2, D3 et D4) ont été chacun testés sur 6 personnes afin que soit mesuré leur impact sur la blancheur des dents.

Cet impact est mesuré par un indice de blancheur.

Tous les patients utilisaient auparavant le même dentifrice.

Blancheur			
D1	D2	D3	D4
16	18	19	20
17	20	27	23
17	20	28	24
19	21	29	25
21	22	32	26
24	23	34	29

En utilisant le logiciel R, on a entré les instructions suivantes :

```
> x1<-c(16,17,17,19,21,24)
> x2<-c(18,20,20,21,22,23)
> x3<-c(19,27,28,29,32,34)
> x4<-c(20,23,24,25,26,29)
> dentifrice = rep(c("D1","D2","D3","D4"),rep(6,4))
> blancheur = c(x1,x2,x3,x4)
> dentifrice = factor(dentifrice)
> donnees = data.frame(blancheur,dentifrice)
> head(donnees)
  blancheur dentifrice
1        16         D1
2        17         D1
3        17         D1
4        19         D1
5        21         D1
6        24         D1
> tail(donnees)
   blancheur dentifrice
19        20         D4
20        23         D4
21        24         D4
22        25         D4
23        26         D4
24        29         D4
```

1) On poursuit alors en entrant les instructions ci-dessous et on obtient les résultats suivants :

```
> shapiro.test(x1)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  x1
W = 0.9025, p-value = 0.3888

> shapiro.test(x2)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  x2
W = 0.974, p-value = 0.9181

> shapiro.test(x3)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  x3
W = 0.9198, p-value = 0.5039
```

```
> shapiro.test(x4)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  x4
W = 0.9916, p-value = 0.9928

> bartlett.test(list(x1,x2,x3,x4))

        Bartlett test of homogeneity of variances

data:  list(x1, x2, x3, x4)
Bartlett's K-squared = 5.1906, df = 3, p-value = 0.1584
```

Expliquer la démarche suivie et donner, en justifiant, le résultat au risque 5 % de chacun des tests effectués.

2) On poursuit avec les instructions suivantes :

```
> modele = lm(blancheur~dentifrice,data=donnees)
> anova(modele)
Analysis of Variance Table

Response: blancheur
           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
dentifrice  3 302.17 100.722  8.3356 0.0008574 ***
Residuals  20 241.67  12.083
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Donner, en justifiant, le résultat au risque 5 % du test effectué et interpréter le résultat obtenu.

3) On complète l'étude avec l'instruction suivante :

```
> kruskal.test(list(x1,x2,x3,x4))

        Kruskal-Wallis rank sum test

data:  list(x1, x2, x3, x4)
Kruskal-Wallis chi-squared = 11.8967, df = 3, p-value = 0.007745
```

Donner, en justifiant, le résultat de ce test au risque 5%. Etait-il utile de le faire ? Si oui, pourquoi ? Si non, dans quel cas aurait-il été utile ?

4) Peut-on considérer, au risque 5%, que la blancheur est moins importante avec le dentifrice 1 qu'avec le dentifrice 3 ? On détaillera le(s) test(s) effectués pour répondre à cette question.

Exercice 4

La distance d'arrêt d'un véhicule est égale à la distance de réaction (distance parcourue entre le moment où le conducteur perçoit un obstacle et celui où il appuie sur la pédale de frein) augmentée du chemin de freinage (distance parcourue entre le début du freinage et l'arrêt total). Le tableau suivant fournit, pour 12 vitesses x exprimées en km/h, le chemin de freinage y mesuré en mètres.

x	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
y	9	11	20	27	39	45	58	78	79	93	108	124

1) Vérifier graphiquement que l'on peut admettre l'existence d'une relation affine entre la vitesse et le chemin de freinage.

2) En supposant que les hypothèses du cours sont satisfaites, estimer les paramètres de la droite de régression de Y en X :

a) ponctuellement ;

b) par des intervalles de confiance au niveau 0,95.

3) Déterminer un intervalle de prévision au niveau 0,95 pour le chemin de freinage à une vitesse de 170 km/h.

4) La corrélation observée est-elle significativement différente de 0 ?

5) En effectuant une transformation adaptée (que l'on précisera) des variables X et Y, déterminer une estimation ponctuelle des paramètres du modèle $Y = cX^d$.

Formulaire de Statistique Inférentielle

1) Estimateurs

Paramètre	Estimateur	Statistique et sa loi
μ	$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$T = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}} : \begin{cases}\text{Student à } n-1 \text{ d.d.l.}\\ \text{si échantillon gaussien}\end{cases}$
σ^2	$S_c^2 = \frac{n}{n-1}S^2$, avec $S^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - (\overline{X})^2$	$Y^2 = \frac{n-1}{\sigma^2}S_c^2 : \begin{cases}\text{Khi deux à } n-1 \text{ d.d.l.}\\ \text{si échantillon gaussien}\end{cases}$
p	$F = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$	$U = \frac{F-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$: Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (approx.) si $np \geq 10$ et $n(1-p) \geq 10$

2) Intervalles de confiance au niveau $1-\alpha$

Paramètre	Intervalle de confiance	Valeurs tabulées
μ	$i_\mu = \left[\bar{x} - \frac{s_c}{\sqrt{n}}t_\alpha \ , \ \bar{x} + \frac{s_c}{\sqrt{n}}t_\alpha\right]$	t_α tel que $P(-t_\alpha < T < t_\alpha) = 1-\alpha$
σ^2	$i_{\sigma^2} = \left[\frac{n-1}{b_\alpha}s_c^2 \ , \ \frac{n-1}{a_\alpha}s_c^2\right]$	a_α et b_α tels que $P(Y^2 \geq a_\alpha) = 1-\frac{\alpha}{2}$, $P(Y^2 \geq b_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$
p	$i_p = \left[f - \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\,u_\alpha \ , \ f + \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\,u_\alpha\right]$	u_α tel que $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1-\alpha$

3) Tests de conformité au risque α

H_0	H_1	Statistique de test	Valeur(s) test(s)
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}}$	t_α tel que $P(-t_\alpha < T < t_\alpha) = 1-\alpha$ t'_α tel que $P(T < t'_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $t'_\alpha = t_{2\alpha}$ t''_α tel que $P(T \geq t''_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $t''_\alpha = t_{2-2\alpha} = -t_{2\alpha}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$Y^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2}S_c^2$	a_α et b_α tels que $P(a_\alpha < Y^2 < b_\alpha) = 1-\alpha$ b'_α tel que $P(Y^2 \geq b'_\alpha) = \alpha$, i.e. $b'_\alpha = b_{2\alpha}$ a''_α tel que $P(Y^2 \geq a''_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $a''_\alpha = a_{2\alpha}$
$p = p_0$	$p \neq p_0$ $p > p_0$ $p < p_0$	$U = \frac{F-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	u_α tel que $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1-\alpha$ u'_α tel que $P(U < u'_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $u'_\alpha = u_{2\alpha}$ u''_α tel que $P(U \geq u''_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $u''_\alpha = -u_{2\alpha}$

Pour un intervalle de confiance de μ et/ou un test de conformité sur μ avec un grand échantillon (quelconque), on peut approcher la loi de Student par la loi Normale $\mathcal{N}(0;1)$, et remplacer t_α, t'_α et t''_α par u_α, u'_α et u''_α.

4) Tests d'homogénéité au risque α

H_0	H_1	Statistique de test et sa loi sous l'hypothèse H_0	Valeur(s) test(s)
$\sigma_1 = \sigma_2$	$\sigma_1 \neq \sigma_2$	$F = \dfrac{S_{c,1}^2}{S_{c,2}^2}$: Snédécor à $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ d.d.l. si échantillons indépendants gaussiens	f_α tel que $P(F \geq f_\alpha) = \dfrac{\alpha}{2}$ en travaillant avec $f \geq 1$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$U = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\left(\dfrac{S_{c,1}^2}{n_1} + \dfrac{S_{c,2}^2}{n_2}\right)}}$: Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (approx.) si grands échantillons indépendants	u_α u'_α u''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$T = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{s_{c,1,2}\sqrt{\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$: Student à $n_1 + n_2 - 2$ d.d.l. (approx.) si petits échantillons indép. gaussiens et si $\sigma_1 = \sigma_2$ avec $s_{c,1,2}^2 = \frac{(n_1-1)s_{c,1}^2 + (n_2-1)s_{c,2}^2}{n_1+n_2-2}$	t_α t'_α t''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$U = \dfrac{\overline{D}}{\frac{S_{c,d}}{\sqrt{n}}}$, où $D = X_1 - X_2$: Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (approx.) si grands échantillons appariés	u_α u'_α u''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$T = \dfrac{\overline{D}}{\frac{S_{c,d}}{\sqrt{n}}}$, où $D = X_1 - X_2$: Student à $n - 1$ d.d.l. si petits échantillons appariés gaussiens	t_α t'_α t''_α
$p_1 = p_2$	$p_1 \neq p_2$ $p_1 > p_2$ $p_1 < p_2$	$U = \dfrac{F_1 - F_2}{\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}) f_{1,2}(1 - f_{1,2})}}$: Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (approx.) si $n_1 f_1 \geq 5$, $n_1(1 - f_1) \geq 5$, $n_2 f_2 \geq 5$, $n_2(1 - f_2) \geq 5$, avec $f_{1,2} = \dfrac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2}$	u_α u'_α u''_α

5) Test d'ajustement à une loi théorique à r modalités au risque α

Hypothèse H_0 : le caractère suit la loi théorique définie par les probabilités p_i.
Hypothèse H_1 : $\overline{H_0}$.
Statistique de test : $D = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$.
Loi de D sous l'hypothèse H_0 : khi deux à $r - 1 - k$ d.d.l.
Valeur test : b_α tel que $P(D \geq b_\alpha) = \alpha$.

6) Test d'indépendance entre deux caractères à r et s modalités au risque α

Hypothèse H_0 : les deux caractères sont indépendants.

Hypothèse H_1 : $\overline{H_0}$.
Statistique de test : $D = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(N_{i,j} - np_{i,j})^2}{np_{i,j}}$, avec $np_{i,j} = \dfrac{n_{i,\bullet}\ n_{\bullet,j}}{n}$, $n_{i,\bullet} = \displaystyle\sum_{j=1}^{s} n_{i,j}$ et $n_{\bullet,j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_{i,j}$.
Loi de D sous l'hypothèse H_0 : khi deux à $(r - 1)(s - 1)$ d.d.l.
Valeur test : b_α tel que $P(D \geq b_\alpha) = \alpha$.

7) Régression linéaire simple

On considère deux variables quantitative X et Y et le modèle de régression $Y = \alpha X + \beta + \varepsilon$, où ε suit la loi normale $\mathcal{N}(0;\sigma)$. On désigne par $\rho = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

Droite des moindres carrés de y **en** x.

Droite d'équation $y = ax + b$, avec $a = \dfrac{cov(x,y)}{s_x^2}$, $b = \bar{y} - a\bar{x}$,

et coefficient de corrélation linéaire r entre x et y avec :et $r = \dfrac{cov(x,y)}{s_x s_y}$

où $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, $s_x^2 = \left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \bar{x}^2$, $s_y^2 = \left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \bar{y}^2$ et $cov(x,y) = \left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \bar{x}\bar{y}$.

Effectuant plusieurs expériences, et ainsi plusieurs échantillonnages, a, b et r apparaissent comme les valeurs observées des variables aléatoires A, B et R.

On a alors $E(A) = \alpha$, $E(B) = \beta$ et $E(R) \simeq \rho + \dfrac{\rho(1-\rho^2)}{2(n-1)}$. Des estimations ponctuelles de α, β, σ^2 et ρ sont alors respectivement a, b, $s_R^2 = \dfrac{n}{n-2}(1-r^2)s_y^2$ et r (ou plus précisément $r + \dfrac{r(1-r^2)}{2(n-3)}$).

Intervalle de confiance et tests pour un coefficient de régression linéaire α

La situation est celle décrite dans le paragraphe 1.

La variance de A est égale à $\dfrac{\sigma^2}{ns_x^2}$, et peut être estimée par $s_A^2 = \dfrac{s_R^2}{ns_x^2}$. La variable aléatoire $T = \dfrac{A-\alpha}{s_A}$ suit la loi de Student à $n-2$ degrés de liberté. On détermine alors le réel t_{α_1} tel que $P(-t_{\alpha_1} < T < t_{\alpha_1}) = 1-\alpha_1$ (table 3). On en déduit un intervalle de confiance de α au niveau $1-\alpha_1$:

$$i_\alpha = \left[a - s_A t_{\alpha_1}\ ,\ a + s_A t_{\alpha_1}\right].$$

Test (bilatéral) **de** $H_0 : \alpha = \alpha_0$ **contre** $H_1 : \alpha \neq \alpha_0$.

On calcule $t = \dfrac{a-\alpha_0}{s_A}$ et on décide que :

- si $t \in\ ]-t_{\alpha_1}, t_{\alpha_1}[$, alors on ne peut rejeter H_0 ;
- si $t \notin\ ]-t_{\alpha_1}, t_{\alpha_1}[$, alors on rejette H_0 avec une probabilité α_1 de se tromper.

Cas de β. On peut mener une étude analogue pour β en utilisant le fait que la variance de B est égale à $\sigma^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{\bar{x}^2}{ns_x^2}\right)$, et peut être estimée par $s_B^2 = s_R^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{\bar{x}^2}{ns_x^2}\right) = \dfrac{s_R^2}{n^2 s_x^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, et que la variable aléatoire $T = \dfrac{B-\beta}{s_B}$ suit la loi de Student à $n-2$ degrés de liberté.

Prévision. L'ajustement affine peut servir à prévoir la valeur attendue pour Y quand l'expérimentateur fixe $X = x_0$. L'estimation ponctuelle de cette valeur est $\widehat{y_0} = ax_0 + b$, et un intervalle de confiance de cette valeur au niveau $1-\alpha_1$: $i_{y_0} = \left[\ \widehat{y_0} - t_{\alpha_1}\sqrt{s_R^2\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{(x_0-\bar{x})^2}{ns_x^2}\right)}\ ,\ \widehat{y_0} + t_{\alpha_1}\sqrt{s_R^2\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{(x_0-\bar{x})^2}{ns_x^2}\right)}\ \right]$.

Intervalle de confiance et tests pour un coefficient de corrélation

Soit ζ le nombre défini par $\zeta = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\rho}{1-\rho}\right) = \arg th\rho$.

Soit Z la variable aléatoire qui au cours de chaque échantillonnage prend la valeur $z = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+r}{1-r}\right) = \arg thr$. Lorsque n est assez grand ($n \geq 20$ en pratique), un intervalle de confiance de ζ au niveau $1-\alpha$:

$$i_\zeta = \left[z - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n-3}}\ ,\ z + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n-3}}\right] = [z_1, z_2].$$

D'où un intervalle de confiance de ρ au niveau $1-\alpha$: $i_\rho = [r_1, r_2] = [thz_1, thz_2]$.

Test de $H_0 : \rho = 0$ **contre** $H_1 : \rho \neq 0$.

Sous l'hypothèse H_0, $T = \dfrac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}}$ suit la loi de Student à $n-2$ degrés de liberté. On calcule $t = \dfrac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$:

- si $t \in\ ]-t_\alpha, t_\alpha[$, alors on ne peut rejeter H_0 ;
- si $t \notin\ ]-t_\alpha, t_\alpha[$, alors on rejette H_0 avec une probabilité α de se tromper.

TABLE 1

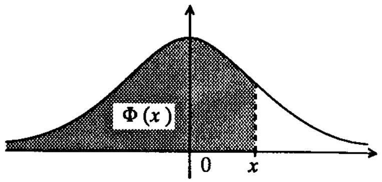
Fonction de répartition de la loi normale réduite

Si U suit la loi normale réduite, pour $x \geqslant 0$, la table donne la valeur :

$\phi(x) = P(U \leqslant x)$.

La valeur x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.
Pour $x < 0$, on a :

$\phi(x) = 1 - \phi(-x)$.



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

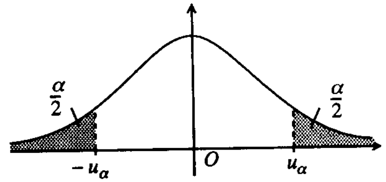
TABLE 2

Loi normale réduite (table de l'écart réduit)

Si U est une variable aléatoire qui suit la loi normale réduite, la table donne, pour α choisi, la valeur u_α telle que :

$P(|U| \geqslant u_\alpha) = \alpha$.

La valeur α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

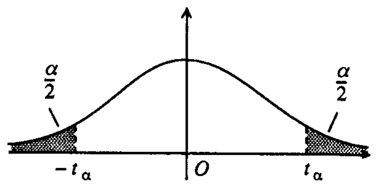


α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,3	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,5	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,6	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,7	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,8	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,9	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

TABLE 3

Lois de Student

Si T est une variable aléatoire qui suit la loi de Student à ν degrés de liberté, la table donne, pour α choisi, le nombre t_α tel que $P(|T| \geqslant t_\alpha) = \alpha$.



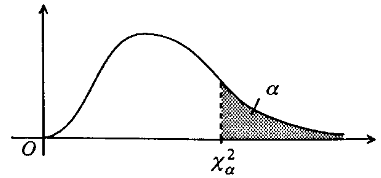
ν \ α	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,681	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,679	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,677	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,674	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Lorsque le degré de liberté est infini, il s'agit du nombre u_α correspondant à la loi normale centrée réduite (*cf.* table 2).

TABLE 4

Lois de Pearson ou lois du χ^2

Si Y^2 est une variable aléatoire qui suit la loi du χ^2 à ν degrés de liberté, la table donne, pour α choisi, le nombre χ^2_α tel que $P(Y^2 \geqslant \chi^2_\alpha) = \alpha$.



ν \ α	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,000 2	0,001	0,004	0,016	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,13
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,67	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,84	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,80	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,32
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,61	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,41	39,37	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,88	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,57	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

Lorsque le degré de liberté ν est tel que $\nu > 30$, la variable aléatoire :

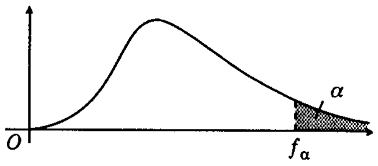
$U = \sqrt{2Y^2} - \sqrt{2\nu - 1}$

suit à peu près la loi normale réduite.

TABLE 5

Lois de Snédécor ($\alpha = 0{,}025$)

Si F est une variable aléatoire qui suit la loi de Snédécor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté, la table donne le nombre f_α tel que $P(F \geqslant f_\alpha) = \alpha = 0{,}025$.

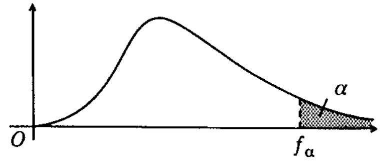


ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	648	800	864	900	922	937	957	969	985	993	1 001	1 018
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	8,98	8,84	8,66	8,56	8,46	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,76	6,62	6,43	6,33	6,23	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,60	5,46	5,27	5,17	5,07	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,90	4,76	4,57	4,47	4,36	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,43	4,30	4,10	4,00	3,89	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,10	3,96	3,77	3,67	3,56	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,85	3,72	3,52	3,42	3,31	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,66	3,53	3,33	3,23	3,12	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,51	3,37	3,18	3,07	2,96	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,39	3,25	3,05	2,95	2,84	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,29	3,15	2,95	2,84	2,73	2,49
15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,20	3,06	2,86	2,76	2,64	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,12	2,99	2,79	2,68	2,57	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,06	2,92	2,72	2,62	2,50	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,01	2,87	2,67	2,56	2,44	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	2,96	2,82	2,62	2,51	2,39	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	2,91	2,77	2,57	2,46	2,35	2,09
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,84	2,70	2,50	2,39	2,27	2,00
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,78	2,64	2,44	2,33	2,21	1,94
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,73	2,59	2,39	2,28	2,16	1,88
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,69	2,55	2,34	2,23	2,11	1,83
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,65	2,51	2,31	2,20	2,07	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,53	2,39	2,18	2,07	1,94	1,64
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,67	2,46	2,32	2,11	1,99	1,87	1,55
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,41	2,27	2,06	1,94	1,82	1,48
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,36	2,21	2,00	1,88	1,75	1,40
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,32	2,18	1,97	1,85	1,71	1,35
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,19	2,05	1,83	1,71	1,57	1,00

TABLE 6

Lois de Snédécor ($\alpha = 0{,}05$)

Si F est une variable aléatoire qui suit la loi de Snédécor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté, la table donne le nombre f_α tel que $P(F \geqslant f_\alpha) = \alpha = 0{,}05$.



ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	242	246	248	250	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,85	2,72	2,65	2,57	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,62	2,54	2,47	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,67	2,53	2,46	2,38	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39	2,31	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28	2,19	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,45	2,31	2,23	2,15	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19	2,11	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,38	2,23	2,16	2,07	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,84
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,30	2,15	2,07	1,98	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,25	2,11	2,03	1,94	1,73
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,22	2,07	1,99	1,90	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,19	2,04	1,96	1,87	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	2,03	1,87	1,78	1,69	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65	1,39
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,95	1,79	1,70	1,60	1,32
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,03	1,93	1,77	1,68	1,57	1,28
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,83	1,67	1,57	1,46	1,00