Université de Picardie Jules Verne **2009-2010**
UFR des Sciences

Licence mention Mathématiques et mention Informatique parcours MIAGE - Semestre 3
Statistique et Probabilités
Examen du lundi 31 mai 2010

Durée 2h00
Tout document interdit - Calculatrices autorisées

Exercice 1

Des relevés effectués pendant de nombreuses années ont permis d'établir que la hauteur annuelle des pluies dans la Beauce (France) [en mm] suit une loi normale $\mathcal{N}(600, 100)$.

Des entrepreneurs, surnommés faiseurs de pluie, prétendaient pouvoir augmenter le niveau moyen de pluie, ceci par l'insémination des nuages au moyen d'iodure d'argent et au-delà augmenter le taux de production. Leur procédé fut mis à l'essai entre 1951 et 1959 et on releva les hauteurs de pluies suivantes :

Année	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
Hauteur de pluie en mm	550	630	780	580	630	540	660	800	650

1) a) Préciser la population et le caractère étudiés.
b) Préciser la taille d'échantillon, le(s) estimateur(s) mis en jeu et leur loi.
2) a) Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart-type de la hauteur annuelle des pluies.
b) Déterminer un intervalle de confiance au niveau 95% de la hauteur annuelle moyenne des pluies.
c) Peut-on en déduire que la hauteur annuelle moyenne de pluie a augmenté grâce aux faiseurs de pluies ? Justifier la réponse.
3) a) Expliquer brièvement ce que représentent les erreurs de première et deuxième espèce d'un test statistique.
b) Effectuer un test statistique au risque 5%, puis 10%, pour savoir si la hauteur annuelle moyenne des pluies a augmenté grâce aux faiseurs de pluies. En cas de décisions contradictoires avec les deux risques 5% et 10%, préciser et justifier la décision à retenir.

Exercice 2

Dans cet exercice, les proportions (ou leur valeurs approchées) seront données avec 4 décimales.

Avant une élection, un candidat affirme qu'il est sûr de dépasser le score des 30 %. Lors d'un sondage réalisé avant l'élection auprès d'un échantillon de 500 électeurs, 160 électeurs ont déclaré vouloir voter pour ce candidat.

1) Préciser la(les) population(s) et le(s) caractère(s) étudié(s), ainsi que la(les) taille(s) d'échantillon. Indiquer le(s) estimateur(s) mis en jeu dans la suite.
2) a) Déterminer un intervalle de confiance de la proportion d'électeurs qui vont voter pour le candidat.
b) Peut-on conclure que le candidat va dépasser le score des 30 % ? Justifier votre réponse.
3) Effectuer un test statistique au risque 5% pour savoir si le candidat va dépasser le score des 30 %.
4) Le candidat a-t-il raison d'être sûr de lui ?

Exercice 3.

Des dosages de l'acide aspartique total de l'urine, en mg/24h, ont été effectués sur deux groupes d'adultes à régime alimentaire normal. Les dosages ont donné les résultats suivants :

	Hommes	Femmes
Effectif du groupe	53	48
Moyenne	$91,13$	$112,9$
Ecart-type corrigé	$30,49$	$48,99$

1) Préciser la(les) population(s) et le(s) caractère(s) étudié(s), ainsi que la(les) taille(s) d'échantillon. Indiquer le(s) estimateur(s) mis en jeu dans la suite.

2) Effectuer le(s) tests statistique(s) adéquats, au risque 5%, pour répondre à la question suivante : peut-on considérer que les hommes et les femmes ont le même dosage d'acide aspartique ?

3) Si les effectifs des deux groupes avait été 21 et 21, auriez-vous pu suivre la même démarche qu'au 2) ? Si oui, justifier. Si non, quel(s) test(s) adéquat(s) pourriez-vous proposer ? *Quelle que soit la réponse, on ne demande pas d'effectuer le(s) test(s) mais seulement de les indiquer*.

Exercice 4.

Pour un nombre donné, on appelle "chiffre significatif" le premier chiffre non nul lu dans l'écriture de ce nombre en base 10. Par exemple, le chiffre significatif de 2543,34 est 2, celui de 0,00678 est 6.

La loi dite de Benford prévoit que le chiffre significatif d'un nombre tiré de manière aléatoire suit une loi logarithmique et non, comme on pourrait s'y attendre, une loi uniforme. Plus précisément, pour un nombre choisi au hasard, la probabilité que son chiffre siginificatif soit égal à i est $\log_{10}\left(1+\frac{1}{i}\right)$.

Ainsi, une variable aléatoire X suit une loi de Benford si elle est à valeurs dans $\{1,2,\ldots,9\}$ et si

$$\text{pour tout } i \in \{1,2,\ldots,9\},\ P(X=i) = \log_{10}\left(1+\frac{1}{i}\right).$$

Les contrôleurs fiscaux américains s'appuient sur cette loi pour détecter des fraudes fiscales : en effet, des données falsifiées suivent rarement une loi de Benford. Suivant cet exemple, nous avons contrôlé le livre de compte d'une entreprise en choisissant au hasard 150 montants exprimés en euros, parmi lesquels nous avons observé, par exemple, 20 montants de chiffre significatif " 1 ", 18 montants de chiffre significatif " 2 ", ...

Dans le but de tester l'hypothèse que le caractère étudié suit une loi de Benford, on a utilisé le logiciel Excel pour effectuer les calculs présentés ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Exercice 4**												
2													
3	**Test de khi-deux de conformité à une loi théorique**												
4													
5	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOTAL		
6	n_i	20	18	15	25	10	17	18	20	7	150		
7	p_i	0,3010	0,1761	0,1249	0,0969	0,0792	0,0669	0,0580	0,0512	0,0458	1		
8	np_i	45,15	26,41	18,74	14,54	11,88	10,04	8,70	7,67	6,86	150		
9	d_i	14,01	2,68	0,75	7,53	0,30	4,82	9,95	19,80	0,00	59,84		
10													
11	n_ix_i	20	36	45	100	50	102	126	160	63	702	moyenne	4,68
12	$n_ix_i^2$	20	72	135	400	250	612	882	1280	567	4218	variance	6,22
13													

1) a) Préciser la population et le caractère étudiés. Expliquer pourquoi on peut considérer que ce caractère est une variable aléatoire. Préciser en particulier l'expérience aléatoire et l'espace probabilisé permettant cette modélisation.

b) Préciser la taille d'échantillon, le(s) estimateur(s) mis en jeu et leur loi.

c) Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de la variance du "chiffre significatif" d'un montant issu du livre de compte de l'entreprise. Expliquer la méthode utilisée.

2) a) Ecrire des formules Excel à entrer dans les cellules M11 et M12 pour obtenir les valeurs indiquées.

b) Ces valeurs correspondent-elles à celles que vous avez trouvé au 1)c).

3) Les valeurs p_i correspondent aux probabilités théoriques de la loi de Benford testée.

a) Ecrire une formule Excel à entrer dans la cellule B7 pour obtenir cette valeur, ainsi que les valeurs des cellules C7 à J7 par simple recopie de cette formule.

b) Ecrire une formule Excel à entrer dans la cellule B8 pour obtenir la valeur indiquée, ainsi que les valeurs des cellules C8 à J8 par simple recopie de cette formule.

c) Comment a-t-on obtenu la valeur $14,01$ de la cellule B9 ?

d) Ecrire une formule Excel à entrer dans la cellule K9 pour obtenir la valeur indiquée.

4) a) Peut-on effectuer directement le test statistique à partir des calculs tels qu'ils sont présentés dans le tableau ci-dessus ? Si oui, justifier. Si non, quelle(s) modification(s) faut-il faire ?

b) Effectuer le test de khi-deux, au risque 5%, pour répondre à la question suivante : peut-on considérer que le caractère étudié suit la loi de Benford ?

c) Quelle conclusion pouvez-vous en tirer ?

Formulaire de Statistique Inférentielle

1) Estimateurs

Paramètre	Estimateur	Statistique et sa loi
μ	$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}}$: Student à $n-1$ d.d.l. si échantillon gaussien
σ^2	$S_c^2 = \frac{n}{n-1}S^2$, avec $S^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - (\overline{X})^2$	$Y^2 = \frac{n-1}{\sigma^2}S_c^2$: Khi deux à $n-1$ d.d.l. si échantillon gaussien
p	$F = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$	$U = \dfrac{F-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$: Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (approx.) si $np \geq 10$ et $n(1-p) \geq 10$

2) Intervalles de confiance au niveau $1-\alpha$

Paramètre	Intervalle de confiance	Valeurs tabulées
μ	$i_\mu = \left[\bar{x} - \frac{s_c}{\sqrt{n}}t_\alpha \ , \ \bar{x} + \frac{s_c}{\sqrt{n}}t_\alpha\right]$	t_α tel que $P(-t_\alpha < T < t_\alpha) = 1-\alpha$
σ^2	$i_{\sigma^2} = \left[\frac{n-1}{b_\alpha}s_c^2 \ , \ \frac{n-1}{a_\alpha}s_c^2\right]$	a_α et b_α tels que $P(Y^2 \geq a_\alpha) = 1-\frac{\alpha}{2}$, $P(Y^2 \geq b_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$
p	$i_p = \left[f - \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\,u_\alpha \ , \ f + \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\,u_\alpha\right]$	u_α tel que $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1-\alpha$

3) Tests de conformité au risque α

$\mathbf{H}_0$	$\mathbf{H}_1$	Statistique de test	Valeur(s) test(s)
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$T = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}}$	t_α tel que $P(-t_\alpha < T < t_\alpha) = 1-\alpha$ t'_α tel que $P(T < t'_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $t'_\alpha = t_{2\alpha}$ t''_α tel que $P(T \geq t''_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $t''_\alpha = t_{2-2\alpha} = -t_{2\alpha}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$Y^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2}S_c^2$	a_α et b_α tels que $P(a_\alpha < Y^2 < b_\alpha) = 1-\alpha$ b'_α tel que $P(Y^2 \geq b'_\alpha) = \alpha$, i.e. $b'_\alpha = b_{2\alpha}$ a''_α tel que $P(Y^2 \geq a''_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $a''_\alpha = a_{2\alpha}$
$p = p_0$	$p \neq p_0$ $p > p_0$ $p < p_0$	$U = \dfrac{F-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	u_α tel que $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1-\alpha$ u'_α tel que $P(U < u'_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $u'_\alpha = u_{2\alpha}$ u''_α tel que $P(U \geq u''_\alpha) = 1-\alpha$, i.e. $u''_\alpha = -u_{2\alpha}$

Pour un intervalle de confiance de μ et/ou un test de conformité sur μ avec un grand échantillon (quelconque), on peut approcher la loi de Student par la loi Normale $\mathcal{N}(0;1)$, et remplacer t_α, t'_α et t''_α par u_α, u'_α et u''_α.

4) Tests d'homogénéité au risque α

H_0	H_1	Statistique de test et sa loi sous l'hypothèse H_0	Valeur(s) test(s)
$\sigma_1 = \sigma_2$	$\sigma_1 \neq \sigma_2$	$F = \dfrac{S^2_{c,1}}{S^2_{c,2}}$: Snédécor à (n_1-1, n_2-1) d.d.l. si échantillons indépendants gaussiens	f_α tel que $P(F \geq f_\alpha) = \dfrac{\alpha}{2}$ en travaillant avec $f \geq 1$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$U = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\left(\dfrac{S^2_{c,1}}{n_1} + \dfrac{S^2_{c,2}}{n_2}\right)}}$: Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (approx.) si grands échantillons indépendants	u_α u'_α u''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$T = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{s_{c,1,2}\sqrt{\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$: Student à $n_1 + n_2 - 2$ d.d.l. (approx.) si petits échantillons indép. gaussiens et si $\sigma_1 = \sigma_2$ avec $s^2_{c,1,2} = \frac{(n_1-1)s^2_{c,1}+(n_2-1)s^2_{c,2}}{n_1+n_2-2}$	t_α t'_α t''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$U = \dfrac{\overline{D}}{\frac{S_{c,d}}{\sqrt{n}}}$, où $D = X_1 - X_2$: Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (approx.) si grands échantillons appariés	u_α u'_α u''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$T = \dfrac{\overline{D}}{\frac{S_{c,d}}{\sqrt{n}}}$, où $D = X_1 - X_2$: Student à $n-1$ d.d.l. si petits échantillons appariés gaussiens	t_α t'_α t''_α
$p_1 = p_2$	$p_1 \neq p_2$ $p_1 > p_2$ $p_1 < p_2$	$U = \dfrac{F_1 - F_2}{\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})f_{1,2}(1-f_{1,2})}}$: Normale $\mathcal{N}(0;1)$ (approx.) si $n_1 f_1 \geq 5$, $n_1(1-f_1) \geq 5$, $n_2 f_2 \geq 5$, $n_2(1-f_2) \geq 5$, avec $f_{1,2} = \dfrac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2}$	u_α u'_α u''_α

5) Test d'ajustement à une loi théorique à r modalités au risque α

Hypothèse H_0 : le caractère suit la loi théorique définie par les probabilités p_i.
Hypothèse H_1 : $\overline{H_0}$.
Statistique de test : $D = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$.
Loi de D sous l'hypothèse H_0 : khi deux à $r-1-k$ d.d.l.
Valeur test : b_α tel que $P(D \geq b_\alpha) = \alpha$.

6) Test d'indépendance entre deux caractères à r et s modalités au risque α

Hypothèse H_0 : les deux caractères sont indépendants.

Hypothèse H_1 : $\overline{H_0}$.
Statistique de test : $D = \displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{(N_{i,j} - np_{i,j})^2}{np_{i,j}}$, avec $np_{i,j} = \dfrac{n_{i,\bullet}\ n_{\bullet,j}}{n}$, $n_{i,\bullet} = \displaystyle\sum_{j=1}^{s} n_{i,j}$ et $n_{\bullet,j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_{i,j}$.
Loi de D sous l'hypothèse H_0 : khi deux à $(r-1)(s-1)$ d.d.l.
Valeur test : b_α tel que $P(D \geq b_\alpha) = \alpha$.

TABLE 1

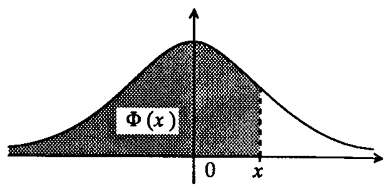
Fonction de répartition de la loi normale réduite

Si U suit la loi normale réduite, pour $x \geqslant 0$, la table donne la valeur :

$\phi(x) = P(U \leqslant x)$.

La valeur x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.
Pour $x < 0$, on a :

$\phi(x) = 1 - \phi(-x)$.



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

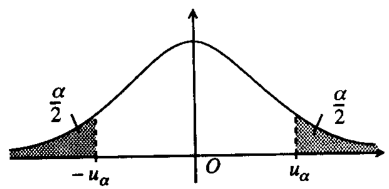
TABLE 2

Loi normale réduite (table de l'écart réduit)

Si U est une variable aléatoire qui suit la loi normale réduite, la table donne, pour α choisi, la valeur u_α telle que :

$P(|U| \geqslant u_\alpha) = \alpha$.

La valeur α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

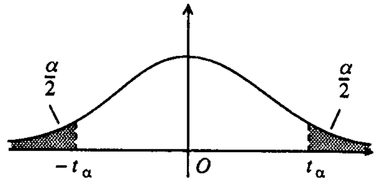


α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,3	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,5	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,6	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,7	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,8	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,9	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

TABLE 3

Lois de Student

Si T est une variable aléatoire qui suit la loi de Student à ν degrés de liberté, la table donne, pour α choisi, le nombre t_α tel que $P(|T| \geqslant t_\alpha) = \alpha$.



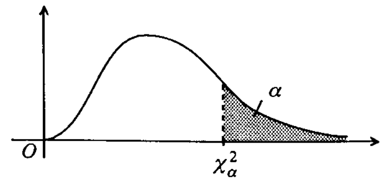
ν \ α	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,681	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,679	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,677	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,674	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Lorsque le degré de liberté est infini, il s'agit du nombre u_α correspondant à la loi normale centrée réduite (*cf.* table 2).

TABLE 4

Lois de Pearson ou lois du χ^2

Si Y^2 est une variable aléatoire qui suit la loi du χ^2 à ν degrés de liberté, la table donne, pour α choisi, le nombre χ^2_α tel que $P(Y^2 \geqslant \chi^2_\alpha) = \alpha$.



ν \ α	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,000 2	0,001	0,004	0,016	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,13
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,67	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,84	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,80	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,32
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,61	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,41	39,37	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,88	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,57	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

Lorsque le degré de liberté ν est tel que $\nu > 30$, la variable aléatoire :

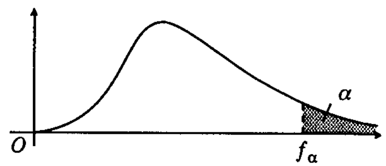
$U = \sqrt{2Y^2} - \sqrt{2\nu - 1}$

suit à peu près la loi normale réduite.

TABLE 5

Lois de Snédécor ($\alpha = 0{,}025$)

Si F est une variable aléatoire qui suit la loi de Snédécor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté, la table donne le nombre f_α tel que $P(F \geqslant f_\alpha) = \alpha = 0{,}025$.

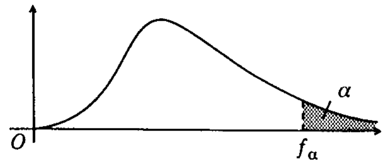


ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	648	800	864	900	922	937	957	969	985	993	1 001	1 018
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	8,98	8,84	8,66	8,56	8,46	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,76	6,62	6,43	6,33	6,23	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,60	5,46	5,27	5,17	5,07	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,90	4,76	4,57	4,47	4,36	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,43	4,30	4,10	4,00	3,89	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,10	3,96	3,77	3,67	3,56	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,85	3,72	3,52	3,42	3,31	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,66	3,53	3,33	3,23	3,12	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,51	3,37	3,18	3,07	2,96	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,39	3,25	3,05	2,95	2,84	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,29	3,15	2,95	2,84	2,73	2,49
15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,20	3,06	2,86	2,76	2,64	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,12	2,99	2,79	2,68	2,57	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,06	2,92	2,72	2,62	2,50	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,01	2,87	2,67	2,56	2,44	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	2,96	2,82	2,62	2,51	2,39	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	2,91	2,77	2,57	2,46	2,35	2,09
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,84	2,70	2,50	2,39	2,27	2,00
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,78	2,64	2,44	2,33	2,21	1,94
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,73	2,59	2,39	2,28	2,16	1,88
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,69	2,55	2,34	2,23	2,11	1,83
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,65	2,51	2,31	2,20	2,07	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,53	2,39	2,18	2,07	1,94	1,64
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,67	2,46	2,32	2,11	1,99	1,87	1,55
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,41	2,27	2,06	1,94	1,82	1,48
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,36	2,21	2,00	1,88	1,75	1,40
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,32	2,18	1,97	1,85	1,71	1,35
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,19	2,05	1,83	1,71	1,57	1,00

TABLE 6

Lois de Snédécor ($\alpha = 0{,}05$)

Si F est une variable aléatoire qui suit la loi de Snédécor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté, la table donne le nombre f_α tel que $P(F \geqslant f_\alpha) = \alpha = 0{,}05$.



ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	242	246	248	250	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,85	2,72	2,65	2,57	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,62	2,54	2,47	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,67	2,53	2,46	2,38	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39	2,31	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28	2,19	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,45	2,31	2,23	2,15	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19	2,11	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,38	2,23	2,16	2,07	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,84
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,30	2,15	2,07	1,98	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,25	2,11	2,03	1,94	1,73
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,22	2,07	1,99	1,90	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,19	2,04	1,96	1,87	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	2,03	1,87	1,78	1,69	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65	1,39
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,95	1,79	1,70	1,60	1,32
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,03	1,93	1,77	1,68	1,57	1,28
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,83	1,67	1,57	1,46	1,00