

Licence mention Mathématiques - Semestre 3

Statistique

Examen de lundi 5 janvier 2015

Durée 2h00

Tout document interdit - Calculatrices autorisées

Exercice 1

1) Dans une population donnée, on considère un caractère qualitatif à deux modalités A et B, représenté par une variable aléatoire X de loi de Bernoulli de paramètre p , où p est la proportion d'individus ayant la modalité A dans la population, avec $p \in]0; 1[$. On considère un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de taille n de X , où n est un entier

naturel tel que $np \geq 10$ et $n(1 - p) \geq 10$. On désigne par $F = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ la fréquence d'échantillon. Soit $\alpha \in]0; 1[$.

a) On suppose dans cette question que p est connu. Déterminer, en détaillant les calculs, un intervalle de fluctuation de F (autour de p) au niveau $1 - \alpha$. Expliquer ce que signifie le résultat obtenu.

b) On suppose dans cette question que p est inconnu. Déterminer, en détaillant les calculs, un intervalle de confiance de p au niveau $1 - \alpha$. Expliquer ce que signifie le résultat obtenu.

On a relevé, dans une rue fixée au hasard avant l'expérience et à des heures déterminées aléatoirement, le nombre de fumeurs parmi les piétons, la semaine de la journée mondiale contre le tabac, qui eut lieu le mardi.

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi
Nombre de passants	250	250	260	240
Nombre de fumeurs	29	20	24	22

2) On se demande si la journée sans tabac a été suivie, c'est-à-dire si une proportion plus faible de personnes fumaient ce jour-là.

a) Déterminer un intervalle de confiance au niveau 95% de la proportion de fumeurs le mardi, puis un intervalle de confiance au niveau 95% de la proportion de fumeurs les autres jours (en regroupant les lundi, mercredi et jeudi).

b) Ces intervalles de confiance permettent-ils de conclure ? Justifier la réponse.

c) Effectuer un test statistique au risque 5% pour savoir si on peut considérer que la journée sans tabac a été suivie. Présenter le détail des calculs permettant d'effectuer ce test.

Exercice 2

Une chaîne d'agences immobilières a fixé un objectif de vente à ses agents de 1,5 biens en moyenne par mois. Pour savoir si cet objectif est atteint, elle a étudié le nombre de biens vendus par agent et par mois.

1) Elle a observé 50 agents pendant un mois dans la moitié nord de la France et obtenu la répartition suivante :

Nombre de biens vendus	0	1	2	3	4	5
Nombre d'agents	14	18	10	5	2	1

a) Préciser la population et le caractère étudiés, la taille d'échantillon, le(s) estimateur(s) mis en jeu et leur loi.

b) Déterminer une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart-type du nombre de biens vendus par agent et par mois.

c) Effectuer un test statistique au risque 5% pour savoir si on peut considérer que l'objectif fixé est atteint. Présenter le détail des calculs permettant d'effectuer ce test.

d) Effectuer un test statistique au risque 5% pour répondre à la question suivante : peut-on considérer que le nombre de biens vendus par agent par mois suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1,5$? Présenter le détail des calculs permettant d'effectuer ce test.

2) Une étude analogue a été menée dans la moitié sud de la France. L'observation de 50 agents a donné les résultats suivants :

Nombre de biens vendus	0	1	2	3	6
Nombre d'agents	17	22	5	5	1

a) En utilisant le logiciel R, on a obtenu les résultats suivants :

```
> x<-c(0,1,2,3,6)
> n<-c(17,22,5,5,1)
> donnees<-rep(x,n)
> mean(donnees)
[1] 1.06
> var(donnees)
[1] 1.363673
> t.test(donnees,mu=1.5,alternative="less")

One Sample t-test

data:  donnees
t = -2.6643, df = 49, p-value = 0.005207
alternative hypothesis: true mean is less than 1.5
```

Expliquer ce que réalisent les instructions saisies et indiquer ce que représentent les valeurs calculées.

Préciser les hypothèses H_0 et H_1 du test statistique mis en oeuvre, puis donner, en justifiant, le résultat du test et conclure au risque 5%.

b) En utilisant le logiciel R, on a obtenu les résultats suivants :

```
> theo<-dpois(0:3,1.5)
> theo[5]<-1-sum(theo)
> chisq.test(n,p=theo)

Chi-squared test for given probabilities

data:  n
X-squared = 11.1063, df = 4, p-value = 0.0254

Message d'avis :
In chisq.test(n, p = theo) :
l'approximation du Chi-2 est peut-être incorrecte
```

Expliquer ce que réalisent les deux premières instructions saisies, puis donner, en justifiant, le résultat au risque 5% du test réalisé.

Expliquer pourquoi il y a un message d'avis.

c) Comparer ces résultats avec ceux obtenus dans le 1).

Exercice 3

Des psychologues ont voulu vérifier que l'intensité du traitement perceptif d'un visage dépend du visage examiné (certains visages retiennent plus l'attention que d'autres). Ils ont construit

l'expérience suivante :

40 sujets sont choisis au hasard et répartis de façon aléatoire dans 5 groupes de 8 sujets chacun. Chaque groupe examine un visage choisi par l'expérimentateur au hasard dans l'ensemble des visages disponibles. On mesure l'intensité du traitement perceptif en observant la dilatation de la pupille lors de l'examen du visage.

On obtient les résultats ci-contre :

Visage				
V1	V2	V3	V4	V5
58	60	63	64	57
51	61	55	64	59
57	66	57	65	65
59	65	60	61	63
56	59	61	66	62
54	59	62	59	64
53	64	58	67	60
52	63	56	60	63

En utilisant le logiciel R, on a entré les instructions suivantes :

```
> x1<-c(58,51,57,59,56,54,53,52)
> x2<-c(60,61,66,65,59,59,64,63)
> x3<-c(63,55,57,60,61,62,58,56)
> x4<-c(64,64,65,61,66,59,67,60)
> x5<-c(57,59,65,63,62,64,60,63)
> visage = rep(c("V1","V2","V3","V4","V5"),rep(8,5))
> dilatation = c(x1,x2,x3,x4,x5)
> visage = factor(visage)
> donnees = data.frame(dilatation,visage)
> head(donnees)
  dilatation visage
1         58     V1
2         51     V1
3         57     V1
4         59     V1
5         56     V1
6         54     V1
> tail(donnees)
  dilatation visage
35         65     V5
36         63     V5
37         62     V5
38         64     V5
39         60     V5
40         63     V5
```

1) On poursuit alors en entrant les instructions ci-dessous et on obtient les résultats suivants :

```
> shapiro.test(x1)
Shapiro-Wilk normality test
data:  x1
W = 0.9505, p-value = 0.716

> shapiro.test(x4)
Shapiro-Wilk normality test
data:  x4
W = 0.93, p-value = 0.5161

> shapiro.test(x2)
Shapiro-Wilk normality test
data:  x2
W = 0.9126, p-value = 0.373

> shapiro.test(x5)
Shapiro-Wilk normality test
data:  x5
W = 0.9456, p-value = 0.667

> shapiro.test(x3)
Shapiro-Wilk normality test
data:  x3
W = 0.9505, p-value = 0.716

> bartlett.test(list(x1,x2,x3,x4,x5))
Bartlett test of homogeneity of variances
data:  list(x1, x2, x3, x4, x5)
Bartlett's K-squared = 0.0705, df = 4, p-value = 0.9994
```

Expliquer la démarche suivie et donner, en justifiant, le résultat au risque 5 % de chacun des tests effectués.

2) On poursuit avec les instructions suivantes :

```
> modele = lm(dilatation~visage,data=donnees)
> anova(modele)
Analysis of Variance Table

Response: dilatation
      Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
visage  4 348.15   87.037  10.717 8.894e-06 ***
Residuals 35 284.25    8.121
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Donner, en justifiant, le résultat au risque 5 % du test effectué et interpréter le résultat obtenu.

3) On complète l'étude avec l'instruction suivante :

```
> kruskal.test(list(x1,x2,x3,x4,x5))
```

```
Kruskal-Wallis rank sum test
```

```
data: list(x1, x2, x3, x4, x5)
```

```
Kruskal-Wallis chi-squared = 20.2468, df = 4, p-value = 0.0004464
```

Donner, en justifiant, le résultat de ce test au risque 5%. Etait-il utile de le faire ? Si oui, pourquoi ? Si non, dans quel cas aurait-il été utile ?

4) Peut-on considérer, au risque 5%, que la dilatation de la pupille est moins importante avec le visage 1 qu'avec le visage 4 ? On détaillera le(s) test(s) effectués pour répondre à cette question.

Exercice 4

On a mesuré, pour 8 coulées d'acier, la teneur en carbone x (unité : 0,01 %) et la résistance à la traction y (unité : 1 daN/mm²), et on a obtenu les résultats suivants :

x	26	27	30	38	45	48	52	56
y	48	55	55	57	68	70	74	75

1) Vérifier graphiquement que l'on peut admettre l'existence d'une relation affine entre la teneur en carbone et la résistance à la traction.

2) En supposant que les hypothèses du cours sont satisfaites, estimer les paramètres de la droite de régression de Y en X :

a) ponctuellement ;

b) par des intervalles de confiance au niveau 0,95.

3) La corrélation observée est-elle significativement différente de 0 ?

Formulaire de Statistique Inférentielle

1) Estimateurs

Paramètre	Estimateur	Statistique et sa loi
μ	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$	$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}} : \begin{cases} \text{Student à } n - 1 \text{ d.d.l.} \\ \text{si échantillon gaussien} \end{cases}$
σ^2	$S_c^2 = \frac{n}{n-1} S^2$, avec $S^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - (\bar{X})^2$	$Y^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} S_c^2 : \begin{cases} \text{Khi deux à } n - 1 \text{ d.d.l.} \\ \text{si échantillon gaussien} \end{cases}$
p	$F = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$	$U = \frac{F - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} : \begin{cases} \text{Normale } \mathcal{N}(0; 1) \text{ (approx.)} \\ \text{si } np \geq 10 \text{ et } n(1-p) \geq 10 \end{cases}$

2) Intervalles de confiance au niveau $1 - \alpha$

Paramètre	Intervalle de confiance	Valeurs tabulées
μ	$i_\mu = \left[\bar{x} - \frac{S_c}{\sqrt{n}} t_\alpha, \bar{x} + \frac{S_c}{\sqrt{n}} t_\alpha \right]$	t_α tel que $P(-t_\alpha < T < t_\alpha) = 1 - \alpha$
σ^2	$i_{\sigma^2} = \left[\frac{n-1}{b_\alpha} S_c^2, \frac{n-1}{a_\alpha} S_c^2 \right]$	a_α et b_α tels que $\begin{aligned} P(Y^2 \geq a_\alpha) &= 1 - \frac{\alpha}{2} \\ P(Y^2 \geq b_\alpha) &= \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$
p	$i_p = \left[f - \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}} u_\alpha, f + \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}} u_\alpha \right]$	u_α tel que $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1 - \alpha$

3) Tests de conformité au risque α

H_0	H_1	Statistique de test	Valeur(s) test(s)
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}}$	t_α tel que $P(-t_\alpha < T < t_\alpha) = 1 - \alpha$ t'_α tel que $P(T < t'_\alpha) = 1 - \alpha$, i.e. $t'_\alpha = t_{2\alpha}$ t''_α tel que $P(T \geq t''_\alpha) = 1 - \alpha$, i.e. $t''_\alpha = t_{2-2\alpha} = -t_{2\alpha}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$Y^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2} S_c^2$	a_α et b_α tels que $P(a_\alpha < Y^2 < b_\alpha) = 1 - \alpha$ b'_α tel que $P(Y^2 \geq b'_\alpha) = \alpha$, i.e. $b'_\alpha = b_{2\alpha}$ a''_α tel que $P(Y^2 \geq a''_\alpha) = 1 - \alpha$, i.e. $a''_\alpha = a_{2\alpha}$
$p = p_0$	$p \neq p_0$ $p > p_0$ $p < p_0$	$U = \frac{F - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	u_α tel que $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1 - \alpha$ u'_α tel que $P(U < u'_\alpha) = 1 - \alpha$, i.e. $u'_\alpha = u_{2\alpha}$ u''_α tel que $P(U \geq u''_\alpha) = 1 - \alpha$, i.e. $u''_\alpha = -u_{2\alpha}$

Pour un intervalle de confiance de μ et/ou un test de conformité sur μ avec un grand échantillon (quelconque), on peut approcher la loi de Student par la loi Normale $\mathcal{N}(0; 1)$, et remplacer t_α , t'_α et t''_α par u_α , u'_α et u''_α .

4) Tests d'homogénéité au risque α

H_0	H_1	Statistique de test et sa loi sous l'hypothèse H_0	Valeur(s) test(s)
$\sigma_1 = \sigma_2$	$\sigma_1 \neq \sigma_2$	$F = \frac{S_{c,1}^2}{S_{c,2}^2}$: Snédécour à $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ d.d.l. si échantillons indépendants gaussiens	f_α tel que $P(F \geq f_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$ en travaillant avec $f \geq 1$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$U = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{S_{c,1}^2}{n_1} + \frac{S_{c,2}^2}{n_2}\right)}}$: Normale $\mathcal{N}(0; 1)$ (approx.) si grands échantillons indépendants	u_α u'_α u''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_{c,1,2} \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$: Student à $n_1 + n_2 - 2$ d.d.l. (approx.) si petits échantillons indép. gaussiens et si $\sigma_1 = \sigma_2$ avec $s_{c,1,2}^2 = \frac{(n_1-1)s_{c,1}^2 + (n_2-1)s_{c,2}^2}{n_1+n_2-2}$	t_α t'_α t''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$U = \frac{\bar{D}}{\frac{S_{c,d}}{\sqrt{n}}}$, où $D = X_1 - X_2$: Normale $\mathcal{N}(0; 1)$ (approx.) si grands échantillons appariés	u_α u'_α u''_α
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$	$T = \frac{\bar{D}}{\frac{S_{c,d}}{\sqrt{n}}}$, où $D = X_1 - X_2$: Student à $n - 1$ d.d.l. si petits échantillons appariés gaussiens	t_α t'_α t''_α
$p_1 = p_2$	$p_1 \neq p_2$ $p_1 > p_2$ $p_1 < p_2$	$U = \frac{F_1 - F_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)f_{1,2}(1 - f_{1,2})}}$: Normale $\mathcal{N}(0; 1)$ (approx.) si $n_1 f_1 \geq 5, n_1(1 - f_1) \geq 5,$ $n_2 f_2 \geq 5, n_2(1 - f_2) \geq 5,$ avec $f_{1,2} = \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2}$	u_α u'_α u''_α

5) Test d'ajustement à une loi théorique à r modalités au risque α

Hypothèse H_0 : le caractère suit la loi théorique définie par les probabilités p_i .

Hypothèse H_1 : $\overline{H_0}$.

Statistique de test : $D = \sum_{i=1}^r \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$.

Loi de D sous l'hypothèse H_0 : khi deux à $r - 1 - k$ d.d.l.

Valeur test : b_α tel que $P(D \geq b_\alpha) = \alpha$.

6) Test d'indépendance entre deux caractères à r et s modalités au risque α

Hypothèse H_0 : les deux caractères sont indépendants.

Hypothèse H_1 : $\overline{H_0}$.

Statistique de test : $D = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(N_{ij} - np_{ij})^2}{np_{ij}}$, avec $np_{ij} = \frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n}$, $n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^s n_{ij}$ et $n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^r n_{ij}$.

Loi de D sous l'hypothèse H_0 : khi deux à $(r - 1)(s - 1)$ d.d.l.

Valeur test : b_α tel que $P(D \geq b_\alpha) = \alpha$.

7) Régression linéaire simple

On considère deux variables quantitative X et Y et le modèle de régression $Y = \alpha X + \beta + \varepsilon$, où ε suit la loi normale $\mathcal{N}(0; \sigma)$. On désigne par $\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .

Droite des moindres carrés de y en x .

Droite d'équation $y = ax + b$, avec $a = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x^2}$, $b = \bar{y} - a\bar{x}$,

et coefficient de corrélation linéaire r entre x et y avec : $r = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x s_y}$

où $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, $s_x^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \bar{x}^2$, $s_y^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - \bar{y}^2$ et $\text{cov}(x, y) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \bar{x}\bar{y}$.

Effectuant plusieurs expériences, et ainsi plusieurs échantillonnages, a , b et r apparaissent comme les valeurs observées des variables aléatoires A , B et R .

On a alors $E(A) = \alpha$, $E(B) = \beta$ et $E(R) \simeq \rho + \frac{\rho(1 - \rho^2)}{2(n - 1)}$. Des estimations ponctuelles de α , β , σ^2 et ρ sont alors respectivement a , b , $s_R^2 = \frac{n}{n - 2} (1 - r^2) s_y^2$ et r (ou plus précisément $r + \frac{r(1 - r^2)}{2(n - 3)}$).

Intervalle de confiance et tests pour un coefficient de régression linéaire α

La situation est celle décrite dans le paragraphe 1.

La variance de A est égale à $\frac{\sigma^2}{ns_x^2}$, et peut être estimée par $s_A^2 = \frac{s_R^2}{ns_x^2}$. La variable aléatoire $T = \frac{A - \alpha}{s_A}$ suit la loi de Student à $n - 2$ degrés de liberté. On détermine alors le réel t_{α_1} tel que $P(-t_{\alpha_1} < T < t_{\alpha_1}) = 1 - \alpha_1$ (table 3). On en déduit un intervalle de confiance de α au niveau $1 - \alpha_1$:

$$i_\alpha = [a - s_A t_{\alpha_1}, a + s_A t_{\alpha_1}].$$

Test (bilatéral) de $H_0 : \alpha = \alpha_0$ contre $H_1 : \alpha \neq \alpha_0$.

On calcule $t = \frac{a - \alpha_0}{s_A}$ et on décide que :

- si $t \in]-t_{\alpha_1}, t_{\alpha_1}[$, alors on ne peut rejeter H_0 ;

- si $t \notin]-t_{\alpha_1}, t_{\alpha_1}[$, alors on rejette H_0 avec une probabilité α_1 de se tromper.

Cas de β . On peut mener une étude analogue pour β en utilisant le fait que la variance de B est égale à $\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{ns_x^2} \right)$, et peut être estimée par $s_B^2 = s_R^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{ns_x^2} \right) = \frac{s_R^2}{n^2 s_x^2} \sum_{i=1}^n x_i^2$, et que la variable aléatoire $T = \frac{B - \beta}{s_B}$ suit la loi de Student à $n - 2$ degrés de liberté.

Prévision. L'ajustement affine peut servir à prévoir la valeur attendue pour Y quand l'expérimentateur fixe $X = x_0$. L'estimation ponctuelle de cette valeur est $\hat{y}_0 = ax_0 + b$, et un intervalle de confiance de cette valeur au niveau $1 - \alpha_1$: $i_{y_0} = \left[\hat{y}_0 - t_{\alpha_1} \sqrt{s_R^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{ns_x^2} \right)}, \hat{y}_0 + t_{\alpha_1} \sqrt{s_R^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{ns_x^2} \right)} \right]$.

Intervalle de confiance et tests pour un coefficient de corrélation

Soit ζ le nombre défini par $\zeta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right) = \text{argth} \rho$.

Soit Z la variable aléatoire qui au cours de chaque échantillonnage prend la valeur $z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + r}{1 - r} \right) = \text{argthr}$. Lorsque n est assez grand ($n \geq 20$ en pratique), un intervalle de confiance de ζ au niveau $1 - \alpha$:

$$i_\zeta = \left[z - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n - 3}}, z + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n - 3}} \right] = [z_1, z_2].$$

D'où un intervalle de confiance de ρ au niveau $1 - \alpha$: $i_\rho = [r_1, r_2] = [\text{th} z_1, \text{th} z_2]$.

Test de $H_0 : \rho = 0$ contre $H_1 : \rho \neq 0$.

Sous l'hypothèse H_0 , $T = \frac{R\sqrt{n - 2}}{\sqrt{1 - R^2}}$ suit la loi de Student à $n - 2$ degrés de liberté. On calcule $t = \frac{r\sqrt{n - 2}}{\sqrt{1 - r^2}}$:

- si $t \in]-t_\alpha, t_\alpha[$, alors on ne peut rejeter H_0 ;

- si $t \notin]-t_\alpha, t_\alpha[$, alors on rejette H_0 avec une probabilité α de se tromper.

TABLE 1

Fonction de répartition de la loi normale réduite

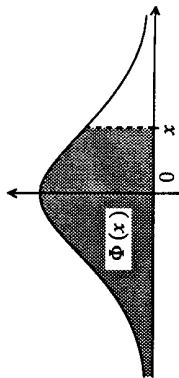
Si U suit la loi normale réduite, pour $x \geq 0$, la table donne la valeur :

$$\phi(x) = P(U \leq x).$$

La valeur x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Pour $x < 0$, on a :

$$\phi(x) = 1 - \phi(-x).$$



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

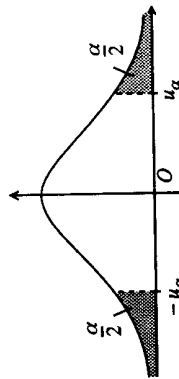
TABLE 2

Loi normale réduite (table de l'écart réduit)

Si U est une variable aléatoire qui suit la loi normale réduite, la table donne, pour α choisi, la valeur u_α telle que :

$$P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha.$$

La valeur α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

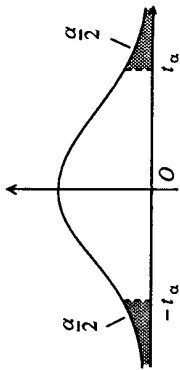


α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,3	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,5	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,6	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,7	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,8	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,9	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

TABLE 3

Lois de Student

Si T est une variable aléatoire qui suit la loi de Student à v degrés de liberté, la table donne, pour α choisi, le nombre t_α tel que $P(T \geq t_\alpha) = \alpha$.



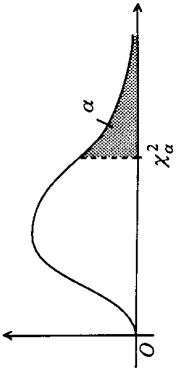
α v	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,681	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,679	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,677	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,674	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Lorsque le degré de liberté est infini, il s'agit du nombre u_α correspondant à la loi normale centrée réduite (cf. table 2).

TABLE 4

Lois de Pearson ou lois du χ^2

Si Y^2 est une variable aléatoire qui suit la loi du χ^2 à v degrés de liberté, la table donne, pour α choisi, le nombre χ^2_α tel que $P(Y^2 \geq \chi^2_\alpha) = \alpha$.



α v	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,000 2	0,001	0,004	0,016	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,13
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,67	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,84	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,80	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,32
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,61	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,41	39,37	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,88	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,57	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

Lorsque le degré de liberté v est tel que $v > 30$, la variable aléatoire :

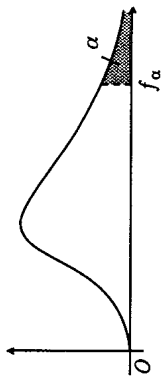
$$U = \sqrt{2Y^2} - \sqrt{2v - 1}$$

suit à peu près la loi normale réduite.

TABLE 5

Lois de Snédécór ($\alpha = 0,025$)

Si F est une variable aléatoire qui suit la loi de Snédécór à (v_1, v_2) degrés de liberté, la table donne le nombre f_α tel que $P(F \geq f_\alpha) = \alpha = 0,025$.

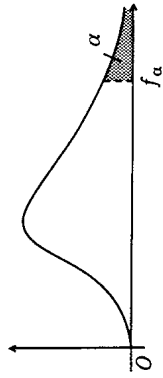


$v_1 \backslash v_2$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	648	800	864	900	922	937	957	969	985	993	1001	1018
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	8,98	8,84	8,66	8,56	8,46	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,76	6,62	6,43	6,33	6,23	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,60	5,46	5,27	5,17	5,07	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,90	4,76	4,57	4,47	4,36	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,43	4,30	4,10	4,00	3,89	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,10	3,96	3,77	3,67	3,56	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,85	3,72	3,52	3,42	3,31	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,66	3,53	3,33	3,23	3,12	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,51	3,37	3,18	3,07	2,96	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,39	3,25	3,05	2,95	2,84	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,29	3,15	2,95	2,84	2,73	2,49
15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,20	3,06	2,86	2,76	2,64	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,12	2,99	2,79	2,68	2,57	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,06	2,92	2,72	2,62	2,50	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,01	2,87	2,67	2,56	2,44	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	2,96	2,82	2,62	2,51	2,39	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	2,91	2,77	2,57	2,46	2,35	2,09
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,84	2,70	2,50	2,39	2,27	2,00
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,78	2,64	2,44	2,33	2,21	1,94
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,73	2,59	2,39	2,28	2,16	1,88
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,69	2,55	2,34	2,23	2,11	1,83
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,65	2,51	2,31	2,20	2,07	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,53	2,39	2,18	2,07	1,94	1,64
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,67	2,46	2,32	2,11	1,99	1,87	1,55
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,41	2,27	2,06	1,94	1,82	1,48
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,36	2,21	2,00	1,88	1,75	1,40
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,32	2,18	1,97	1,85	1,71	1,35
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,19	2,05	1,83	1,71	1,57	1,00

TABLE 6

Lois de Snédécór ($\alpha = 0,05$)

Si F est une variable aléatoire qui suit la loi de Snédécór à (v_1, v_2) degrés de liberté, la table donne le nombre f_α tel que $P(F \geq f_\alpha) = \alpha = 0,05$.



$v_1 \backslash v_2$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	242	246	248	250	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,85	2,72	2,65	2,57	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,62	2,54	2,47	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,67	2,53	2,46	2,38	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39	2,31	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28	2,19	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,45	2,31	2,23	2,15	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19	2,11	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,38	2,23	2,16	2,07	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,84
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,30	2,15	2,07	1,98	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,25	2,11	2,03	1,94	1,73
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,22	2,07	1,99	1,90	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,19	2,04	1,96	1,87	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	2,03	1,87	1,78	1,69	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65	1,39
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,95	1,79	1,70	1,60	1,32
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,03	1,93	1,77	1,68	1,57	1,28
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,83	1,67	1,57	1,46	1,00