Université de Picardie Jules Verne **2017-2018**
IAE Amiens

Licence mention Gestion parcours Management et Marketing Vente - Semestre 5
Statistiques appliquées

Notions élémentaires de calcul des probabilités

1. Expérience aléatoire - Univers - Evénements

Lorsqu'on jette un dé en l'air, on est certain qu'il va retomber et s'immobiliser sur une de ses faces, mais on est incapable de prévoir exactement laquelle. De nombreuses situations semblent obéir à cette dualité : d'une part des aspects prévisibles, déterministes, nécessaires ; d'autre part des aspects imprévisibles, aléatoires.

L'objectif est ici de proposer un modèle mathématique permettant de décrire une situation aléatoire.

On décrit une situation aléatoire bien définie à l'aide du langage des événements qui permet de préciser les objets d'étude. En modélisant les événements par des ensembles, on dispose, grâce au langage des ensembles, d'un outil de calcul sur les événements.

La notion de probabilité répond au besoin de définir une mesure sur les ensembles (représentant les événements) permettant de quantifier la chance qu'ont les événements d'être réalisés ou non.

Expérience aléatoire, **univers**, **événement**.

Expérience aléatoire $\mathcal{E}$: expérience qui, répétée dans les mêmes conditions, peut conduire à des résultats différents (dus "au hasard").

Univers Ω associé à $\mathcal{E}$: ensemble de tous les résultats possibles (a priori) de $\mathcal{E}$. Il peut être fini ou infini (dénombrable si on on peut indexer les résultats par des entiers naturels, ou non dénombrable).

On désignera par ω tout résultat, c'est-à-dire tout élément de Ω.

Evenement lié à $\mathcal{E}$: assertion ou proposition logique dont on peut dire qu'elle est vraie ou non une fois l'expérience $\mathcal{E}$ réalisée (i.e. pour tout résultat $\omega \in \Omega$).

On dit qu'un événement est réalisé si l'assertion qui le définit est vraie.

On convient alors d'identifier un tel événement au sous-ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels il est réalisé : un événement lié à $\mathcal{E}$ est alors une partie de Ω.

Ainsi, lorsque ω est le résultat d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ et A est un événement, on a

$$(A \text{ est réalisé}) \iff \omega \in A$$

Exemple.

$\mathcal{E}$: "lancer d'un dé cubique (faces numérotées de 1 à 6)".
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Evénement A : "obtenir un numéro pair", identifié à $\{2,4,6\}$.

Définitions.

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$. Alors, pour tout $\omega \in \Omega$, $\{\omega\}$ est un événement appelé *événement élémentaire*. De plus, Ω est appelé *événement certain* et $\emptyset$ est appelé *événement impossible*.

Opérations sur les événements.

Soient A et B deux événements liés à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$. On peut alors considérer les événements suivants :

- événement $\overline{A}$: événement contraire de A, réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé ;
- événenement $A \cap B$: réalisé si et seulement si A et B sont réalisés simultanément
- événenement $A \cup B$: réalisé si et seulement si l'un au moins des événements A ou B est réalisé.

Exemple.

$\mathcal{E}$: "lancer de un dé ". $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Les événements A : "on obtient un nombre pair" et B : "on obtient un multiple de 3" sont $A = \{2,4,6\}$ et $B = \{3,6\}$. Les événements $A \cap B$: "on obtient un multiple pair de 3" et $A \cup B$: "on obtient un nombre pair ou un multiple de 3" sont alors $A \cap B = \{6\}$ et $A \cup B = \{2,3,4,6\}$.

Définitions.

Soient A et B deux événements. On dit que A et B sont incompatibles (ou disjoints) si $A \cap B = \emptyset$.

Reprenons l'exemple. Les événements A : obtenir un nombre pair et B : obtenir un nombre impair sont disjoints car $A \cap B = \{2,4,6\} \cap \{1,3,5\} = \emptyset$.

2. La notion de probabilité

Définition.

On appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application P de $\mathcal{A}$ dans $[0,1]$ telle que :

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (additivité de P).

(iii) Pour toute suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, on a $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

Si (iii) est vérifiée, alors (ii) l'est automatiquement. Lorsque Ω est fini, la condition (iii) est inutile.

Propriétés.

(i) $P(\emptyset) = 0$. (ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. (iii) En général, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Construction d'une probabilité sur un univers fini.

Posons $\Omega = \{\omega_1, \omega_i, \ldots, \omega_n\}$, et $p_i = P(\{\omega_i\})$. Pour tout événement $A = \bigcup_{\omega\in A} \{\omega\}$, on a $P(A) = P\left(\bigcup_{\omega\in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$. De plus, $1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p_i$. Une probabilité P sur Ω est donc définie par la donnée des nombres $p_i = P(\{\omega_i\})$, avec $p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Exemple fondamental de l'équiprobabilité sur un univers fini.

Si l'on suppose qu'aucun événement élémentaire $\{\omega_i\}$ n'a plus de chance de se réaliser que les autres, on dit qu'il y a équiprobabilité (les p_i sont égaux) et on a : pour tout $i = 1, \ldots, n$, $p_i = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$. On a donc $P(A) = \sum_{\omega\in A} \frac{1}{n} = cardA \times \frac{1}{n}$. La probabilité P est alors définie de façon unique :

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{nombre\ de\ résultats\ favorables\ à\ A}{nombre\ de\ résultats\ possibles}$$

Les calculs avec une telle probabilité se ramènent alors à des problèmes de dénombrement.

Exemple

On choisit au hasard un individu dans une population de 250 personnes ayant répondu à une sondage, dont 100 sont des femmes.

Considérant $\Omega =$ population des sondés et P l'équiprobabilité, la probabilité de l'événement A "le sondé est une femme" est $P(A) = \frac{100}{250} = 0,4$.

La réponse est la même si l'on ne connaît pas l'effectif $N = card\Omega$ de la population mais si l'on sait que 40% des sondés sont des femmes. On a alors $P(A) = \frac{\frac{40}{100}N}{N} = 0,4$.

Remarque.

Il n'est pas possible de définir l'équiprobabilité si Ω est infini dénombrable. Mais on peut choisir d'autres distributions de probabilité. Par exemple pour $\Omega = \mathbb{N}$, la distribution de Poisson : $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

3. Probabilité conditionnelle

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé

Probabilité de A **sachant** B.

Soit B un événement de probabilité non nulle.

Pour tout événement A, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B (i.e. sachant que B est réalisé) le nombre réel noté $P(A/B)$ défini par :

$$P^B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Formule des probabilités composées.

(i) si A et B sont 2 événements tels que $P(A) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P(A)P^A(B)$

(ii) si A, B et C sont 3 événements tels que $P(A \cap B) \neq 0$, alors $P(A \cap B \cap C) = P(A)P^A(B)P^{A \cap B}(C)$

(iii) on peut généraliser à n événements

Exemple.

Dans une urne contenant 10 boules blanches et 5 boules noires on tire successivement et sans remise 2 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?

Soient les événements A_i : "la i-ème boule tirée est blanche", $i = 1, 2$. On veut calculer $P(A_1 \cap A_2)$.

On a $P(A_1) = \frac{10}{15}$ (il y a 10 boules blanches parmi les 15 boules de l'urne)

et $P^{A_1}(A_2) = \frac{9}{14}$ (il n'y a plus que 9 boules blanches parmi les 14 boules de l'urne),

donc $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P^{A_1}(A_2) = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$.

Formule des probabilités complètes.

Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ un système complet d'événements de probabilité non nulle, i.e. $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$, les A_i étant deux à deux incompatibles et tels que $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$. Alors, pour tout événement B, on a

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i)P^{A_i}(B).$$

Preuve d'un exemple.

Soit un événement A tel que $P(A) \neq 0$ et $P(\overline{A}) \neq 0$. Considérant le système complet d'événements $\{A, \overline{A}\}$, on obtient

On a $B = \Omega \cap B = (A \cup \overline{A}) \cap B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, ces deux événements étant incompatibles, donc $P(B) = P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)) = P((A \cap B)) + P((\overline{A} \cap B)) = P(A)P^A(B) + P(\overline{A})P^{\overline{A}}(B)$.

Formule de Bayes.

Dans les conditions ci-dessus et pour tout événement B de probabilité non nulle, on a

$$\text{pour tout } j \in I,\ P^B(A_j) = \frac{P(A_j)P^{A_j}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_j)}{\sum_{i \in I} P(A_i)P^{A_i}(B)}.$$

Preuve.

Par définition, $P^B(A_j) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}$. Les formules des probabilités composées et complètes donnent respectivement $P(A_j \cap B) = P(A_j)P^{A_j}(B)$ et $P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i)P^{A_i}(B)$.

Remarque. Cette formule s'interprète souvent de la façon suivante : les A_i sont les différentes causes pouvant conduire à la réalisation de B. Connaissant les probabilités $P(A_i)$ de chaque cause et celles $P^{A_i}(B)$ de B conditionnellement aux causes A_i, on calcule la probabilité $P^B(A_j)$ que la réalisation de B soit due à la cause A_j.

4. Indépendance d'événements

Lorsque A et B sont deux événements, on peut caractériser le fait que A et B sont indépendants, i.e. que A se réalise indépendamment de la réalisation ou non de B, par l'égalité $P(A/B) = P(A) = P(A/\overline{B})$. Utilisant le fait que $P^B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, on adopte alors la définition suivante.

Indépendance de deux événements.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Deux événements A et B sont dits indépendants (en probabilité) si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Remarque
A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ sont indépendants, si et seulement si $\overline{A}$ et B sont indépendants, si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Indépendance de 3 événements.
On dit que trois événements A, B et C sont (mutuellement) indépendants si et seulement si
$P(A \cap B) = P(A)P(B), P(A \cap C) = P(A)P(C), P(B \cap C) = P(B)P(C)$ (indépendance 2 à 2)
$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ (indépendance dans leur ensemble)

On peut généraliser la notion d'indépendance à une famille de n événements. Dans ces conditions, on a aussi la mutuelle indépendance en remplaçant certains événements par leur complémentaire.

Application à la répétition d'expériences.
On rencontrera souvent la situation suivante : on répète n fois la même expérience aléatoire $\mathcal{E}$, dans les mêmes conditions. Il est alors naturel de considérer les résultats de ces n expériences comme mutuellement indépendants. Plus précisément, si A_i est un événement lié à la i-ème expérience, $i = 1, \ldots, n$, alors les n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants.

5. Exercices

Exercice 1.
Gap Inc. est une entreprise qui œuvre dans la vente au détail de vêtements et d'accessoires pour femmes, hommes, enfants et bébés sous les bannières Gap, Banana Republic et Old Navy. Le réseau de Gap compte pas moins de 3800 boutiques réparties principalement aux Etats-Unis, Canada, Royaume-Uni, France, Allemagne et au Japon. Elle emploie pas moins de 166 000 employés.
Le service de marketing de Gap Inc, localisé dans la baie de San Francisco[1] , désire entreprendre une étude de marketing sur les habitudes d'achat de ses clients. Après une brève vérification, le directeur du marketing obtient le tableau suivant, qui indique le nombre de magasins selon la taille de population des villes où ils se trouvent :

Population	Nb de magasins
30 000 ou moins	120
30 001 – 60 000	365
61 001 – 90 000	634
90 001 – 150 000	779
150 001 – 250 000	529
250 000 et plus	1385
Total	3812

[1] Source : Site web de Gap Inc. http://www.gapinc.com/about/about.htm. Toutes les données relatives à l'étude sont fictives.

1) Quel conseil pourriez-vous formuler au directeur du marketing quant à l'organisation des données dans son tableau ?

2) Quelle est la probabilité qu'un magasin choisi au hasard se situe dans une ville de 90 000 habitants ou moins ?

3) Quelle est la probabilité qu'un magasin choisi au hasard se retrouve dans une ville dont la population est comprise entre 90 001 et 250 000 habitants ?

Exercice 2.

Pour juger de l'efficacité d'une campagne publicitaire ayant porté sur un produit, on a sondé 1500 personnes, 1000 dans la région du Nord et 500 dans la région du Sud. Les résultats sont les suivants :

Région	Connaissent le produit et le consomment	Connaissent le produit et ne le consomment pas	Ne connaissent pas le produit
Nord	80	150	770
Sud	50	130	320

On choisit une des 1500 personnes sondées au hasard. Calculer la probabilité :

1) qu'elle connaisse le produit.
2) qu'elle connaisse le produit et le consomme.
3) qu'elle connaisse le produit et ne le consomme pas.
4) qu'elle soit du Nord.
5) qu'elle soit du Sud.
6) qu'elle consomme le produit sachant qu'elle le connait.

Exercice 3.

Dans une population, 45% des individus sont vaccinés contre la fièvre jaune, 60% sont vaccinés contre la diphtérie et 30% contre les deux maladies.

1) Traduire ces données en termes de probabilités d'événements.

2) Calculer la probabilité pour qu'un individu, choisi au hasard, soit vacciné contre au moins une des deux maladies.

3) En déduire la probabilité pour qu'un individu, choisi au hasard, ne soit vacciné contre aucune des deux maladies.

4) Calculer la probabilité qu'un individu soit vacciné contre la fièvre jaune mais pas contre la diphtérie.

5) Calculer la probabilité qu'un individu soit vacciné contre la fièvre jaune sachant qu'il est vacciné contre la diphtérie.

Exercice 4.

Un contrôle est effectué sur des pièces produites sur une chaîne de production. On sait que si la pièce est conforme aux normes, il y a 99% de chances pour qu'elle passe le contrôle avec succès. Une pièce non conforme aura 90% de chances d'être repérée comme défectueuse lors du contrôle. On sait par ailleurs que 95% des pièces produites sont conformes aux normes.

1) Quelle est la probabilité pour qu'une pièce prise au hasard soit déclarée défectueuse ?

2) Quelle est la probabilité pour que le contrôle déclare une pièce comme défecteuse à tort ?

3) Quelle est la probabilité pour que le contrôleur se trompe ?

Exercice 5.

Un chercheur en marketing doit évaluer l'efficacité de l'utilisation et de la connaissance du nom d'un produit. Une étude de marché a montré que le produit occupe 10 % du marché et que 95 % des personnes ayant déjà achetés ce produit se rappellent le nom du produit, alors que seulement 20 % des non acheteurs le reconnaissent.

Une personne est choisie d'une manière aléatoire parmi le groupe des consommateurs.

1) Quelle est la probabilité à priori acceptable que la personne choisie soit un acheteur du produit ?

2) Sachant que la personne reconnaît le nom du produit, quelle est la probabilité à posteriori qu'elle fasse partie des acheteurs du produit ?

3) Sachant que la personne ne reconnaît pas le nom du produit, quelle est la probabilité à posteriori qu'elle fasse partie des acheteurs du produit ?

Exercice 6.

Une entreprise fabrique des parfums haut de gamme, qui seront appelés par la suite des originaux. Il existe sur le marché des contrefaçons qui seront appelées par la suite des copies. On sait que 0,5 % des flacons proposés à la vente sont des copies. Pour éliminer ces copies, l'entreprise a mis au point un test optique permettant de se faire une opinion concernant la conformité du produit. On sait que :

- quand le produit est une copie, le test est positif dans 85 % des cas.
- quand le produit est un original, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit un produit au hasard et on le soumet au test. On désigne par O l'événement « le produit est un original » et par T l'événement « le test est positif ».

1) Calculer la probabilité que :
   a) le produit soit un original.
   b) le test soit positif sachant que le produit est un original.
   c) le produit soit une copie et que le test soit positif.
   d) le produit soit un original et que le test soit positif.
   e) le test soit positif.
2) On prend un flacon au hasard et on le soumet au test, il est positif. Quelle est la probabilité que le flacon soit une copie ?
3) Les événements O et T sont-ils indépendants.

Exercice 7.

On fait l'hypothèse que lors d'un vol, chacun des moteurs d'un avion bi-moteur tombe en panne avec une probabilité égale à 0,0001, et ceci d'une façon indépendante l'un de l'autre. On considère les événements G : « Le moteur gauche tombe en panne » et D : « Le moteur droit tombe en panne ».

1) Définir par une phrase l'événement $G \cap D$ puis déterminer sa probabilité.

2) L'avion étant conçu pour pouvoir continuer à voler avec un seul moteur en état de fonctionnement, calculer la probabilité pour qu'il arrive à bon port.

Exercice 8.

Une entreprise mène une étude de marché concernant un nouveau produit qu'elle souhaite lancer. 52% des personnes interrogées se sont déclarées potentiellement intéressées par le produit. On sait en outre que 78% des femmes se sont déclarées intéressées par le produit alors que 62% des hommes ont répondu qu'ils ne l'étaient pas.

1) Calculer la proportion de femmes parmi les répondants.

2) Une personne a répondu qu'elle n'était pas intéressée par le produit. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ?

Exercice 9.

Dans un groupe d'étudiants, 10 garçons et 30 filles ont choisi l'option Marketing, 20 garçons ont choisi l'option Management. On choisit au hasard un étudiant du groupe.

1) Combien doit-il y avoir de filles en Management si l'on veut que les deux événements A : "être un garçon" et B : "avoir choisi l'option Marketing" soient indépendants ?

2) On suppose maintenant que parmi les étudiants de l'option Marketing, 6 filles ont passé l'examen de rattrapage en Statistiques appliquées. C'est le cas de 4 garçons et 12 filles de l'option Management. Quel doit être le nombre de garçons de l'option Marketing à avoir passé le rattrapage en Statistiques appliquées pour que les événements A, B et C :"avoir passé le rattrapage en Statistiques appliquées" soient indépendants dans leur ensemble ?